扫码获取 详解详析

# 考卷Ⅰ 小题·标准练

## 小题1 “8+3+3”73分练

1. A 【解析】因为 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid x^2<16\}=\{0,1,2,3\}$，$B=\{x\mid x-2\leqslant 0\}=\{x\mid x\leqslant 2\}$，所以 $A\cap B=\{0,1,2\}$. 故选 A.

2. B 【解析】由 $a_1=2a_2=2(a_1+d)$，得 $a_1=-2d$，又 $S_m=ma_1+\dfrac{m(m-1)}{2}d=-2md+\dfrac{m(m-1)}{2}d=0$，$d\neq 0$，所以 $-2m+\dfrac{m(m-1)}{2}=0$，解得 $m=5$ 或 $m=0$(舍去)，故选 B.

3. D 【解析】设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由题知 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=4$，则 $|AB|=(x_1+2)+(x_2+2)=2\times 4+4=12$. 故选 D.

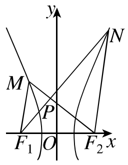
4. B 【解析】对于 A，若直线 $l$ 上有无数个点不在平面 $\alpha$ 内，则 $l/\!/\alpha$ 或 $l$ 与 $\alpha$ 相交，故 A 错误；对于 B，若直线 $a$ 不平行于平面 $\alpha$ 且 $a\not\subset\alpha$，则 $a$ 与 $\alpha$ 相交，所以平面 $\alpha$ 内不存在与 $a$ 平行的直线，故 B 正确；对于 C，因为 $a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$\alpha/\!/\beta$，所以直线 $a$，$b$ 平行或异面，故 C 错误；对于 D，因为直线 $a$，$b$ 相交，且 $a/\!/$平面 $\alpha$，所以 $b/\!/\alpha$ 或 $b$ 与 $\alpha$ 相交，故 D 错误. 故选 B.

5. D 【解析】依题意，先排第 1 名，有 $C_2^1$ 种方法，再排第 5 名，有 $C_2^1$ 种方法，最后排余下的名次，有 $A_3^3$ 种方法，所以这 5 名同学的名次排列(无并列名次)方法共有 $C_2^1C_2^1A_3^3=24$(种). 故选 D.

6. B 【解析】设 $A(x,y)$，则 $\overrightarrow{OA}=(x,y)$，由题得 $\overrightarrow{OB}=(x,-y)$，所以 $B(x,-y)$，得 $\overrightarrow{AB}=(0,-2y)$，所以 $\overrightarrow{OA}^2+\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{AB}=x^2+y^2-2y=0$，即 $x^2+(y-1)^2=1$，所以点 $A$ 的轨迹 $E$ 是一个半径为 1 的圆，故选 B.

7. C 【解析】因为 $2\tan\alpha=\dfrac{\sin 2\beta}{\sin\beta+\sin^2\beta}$，所以 $\dfrac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{2\sin\beta\cos\beta}{\sin\beta+\sin^2\beta}=\dfrac{2\cos\beta}{1+\sin\beta}$，所以 $\sin\alpha+\sin\alpha\sin\beta=\cos\alpha\cos\beta$，所以 $\sin\alpha=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)$，所以 $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos(\alpha+\beta)$. 因为 $\alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $\dfrac{\pi}{2}-\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\alpha+\beta\in(0,\pi)$，所以 $\dfrac{\pi}{2}-\alpha=\alpha+\beta$，所以 $2\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\cos\left(2\alpha+\beta+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{5\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 C.

8. B 【解析】如图，连接 $NF_1$，设 $NF_1$ 与 $MF_2$ 的交点为 $P$，$|MF_1|=x(x>0)$，因为 $\overrightarrow{NF_2}=2\overrightarrow{MF_1}$，所以 $|\overrightarrow{NF_2}|=2|\overrightarrow{MF_1}|=2x$，由双曲线的定义可知 $|MF_2|=|MF_1|+2a=2a+x$，$|\overrightarrow{NF_1}|=2a+|\overrightarrow{NF_2}|=2x+2a$. 因为 $\overrightarrow{NF_2}=2\overrightarrow{MF_1}$，所以 $NF_2/\!/MF_1$，所以 $\triangle NF_2P\backsim\triangle F_1MP$，则 $\angle F_1MF_2=\angle MF_2N=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{|PN|}{|PF_1|}=\dfrac{|PF_2|}{|PM|}=\dfrac{|NF_2|}{|F_1M|}=2$，所以 $|PF_2|=\dfrac{2}{3}|MF_2|=\dfrac{2}{3}(2a+x)$，$|PN|=\dfrac{2}{3}|NF_1|=\dfrac{2}{3}(2a+2x)$. 在 $\triangle PNF_2$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle PF_2N=\dfrac{|PF_2|^2+|F_2N|^2-|PN|^2}{2|PF_2|\cdot|F_2N|}=\dfrac{\frac{4}{9}(2a+x)^2+4x^2-\frac{4}{9}(2a+2x)^2}{2\times\frac{2}{3}(2a+x)\times 2x}=\dfrac{1}{2}$，整理得 $3x^2-10ax=0$，得 $x=\dfrac{10}{3}a$，所以 $|MF_1|=\dfrac{10}{3}a$，$|MF_2|=\dfrac{16}{3}a$，$|F_1F_2|=2c$，在 $\triangle F_1MF_2$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle F_1MF_2=\dfrac{|MF_1|^2+|MF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|MF_1|\cdot|MF_2|}=\dfrac{1}{2}$，得 $7a=3c$，所以双曲线 $C$ 的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{7}{3}$. 故选 B.



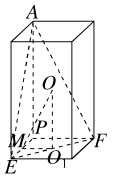

9. BD 【解析】令 $f(x)=\sin 2x=\dfrac{1}{2}$，得 $2x=\dfrac{\pi}{6}+2k_1\pi$ 或 $2x=\dfrac{5\pi}{6}+2k_2\pi$，$k_1$，$k_2\in\mathbf{Z}$，故 $x=\dfrac{\pi}{12}+k_1\pi$ 或 $x=\dfrac{5\pi}{12}+k_2\pi$，$k_1,k_2\in\mathbf{Z}$，故 $|x_1-x_2|=n\pi$，$n\in\mathbf{Z}$ 或 $|x_1-x_2|=\left|\dfrac{5\pi}{12}+k_2\pi-\dfrac{\pi}{12}-k_1\pi\right|=\left|\dfrac{\pi}{3}+m\pi\right|$，$k_1,k_2,m\in\mathbf{Z}$，取 $m=0$，得 $|x_1-x_2|=\dfrac{\pi}{3}$，取 $m=-1$，得 $|x_1-x_2|=\dfrac{2\pi}{3}$. 故选 BD.

10. BCD 【解析】设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，$w=c+d\mathrm{i}(c,d\in\mathbf{R})$. 对于 A，$z^2=(a+b\mathrm{i})^2=a^2+2ab\mathrm{i}-b^2=a^2-b^2+2ab\mathrm{i}$，$|z|^2=(\sqrt{a^2+b^2})^2=a^2+b^2$，故 A 错误；对于 B，$\dfrac{z}{\bar{z}}=\dfrac{z^2}{\bar{z}\cdot z}$，又 $\bar{z}\cdot z=|z|^2$，所以 $\dfrac{z}{\bar{z}}=\dfrac{z^2}{|z|^2}$，故 B 正确；对于 C，$z-w=a+b\mathrm{i}-c-d\mathrm{i}=a-c+(b-d)\mathrm{i}$，则 $\overline{z-w}=a-c-(b-d)\mathrm{i}$，又 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$，$\bar{w}=c-d\mathrm{i}$，则 $\bar{z}-\bar{w}=a-b\mathrm{i}-c+d\mathrm{i}=a-c-(b-d)\mathrm{i}$，即有 $\overline{z-w}=\bar{z}-\bar{w}$，故 C 正确；对于 D，$\left|\dfrac{z}{w}\right|=\left|\dfrac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}\right|=\left|\dfrac{(a+b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}{(c+d\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}\right|=\left|\dfrac{ac+bd-(ad-bc)\mathrm{i}}{c^2+d^2}\right|=\sqrt{\left(\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)^2+\left(-\dfrac{ad-bc}{c^2+d^2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}}{c^2+d^2}$，$\dfrac{|z|}{|w|}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{c^2+d^2}}{c^2+d^2}=\dfrac{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}{c^2+d^2}=\dfrac{\sqrt{a^2c^2+b^2c^2+a^2d^2+b^2d^2}}{c^2+d^2}$，故 $\left|\dfrac{z}{w}\right|=\dfrac{|z|}{|w|}$，故 D 正确. 故选 BCD.

11. ABD 【解析】对于 A，$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，关于原点对称，令 $x=y=0$，可得 $f(0)=2f(0)$，解得 $f(0)=0$，令 $y=-x$，可得 $f(0)=f(x)+f(-x)$，即 $f(x)+f(-x)=0$，故 $y=f(x)$ 是奇函数，故 A 正确；对于 B，令 $x=y=1$，可得 $f(2)=2f(1)-3\times 2$，又 $f(1)=1$，所以 $f(2)=2\times 1-6=-4$，又 $y=f(x)$ 为奇函数，故 $f(-2)=-f(2)=4$，故 B 正确；对于 C，由题知 $f(0)=0$，又 $f(1)=-1$，所以当 $x=0$ 时，$y=f(0)+0=0$，当 $x=1$ 时，$y=f(1)+1=0$，故 $y=f(x)+x^3$ 不是增函数，故 C 错误；对于 D，令 $h(x)=f(x)+x^3$，在 $\mathbf{R}$ 上任取 $x_1>x_2$，则 $h(x_1)-h(x_2)=f(x_1)+x_1^3-f(x_2)-x_2^3=f[(x_1-x_2)+x_2]-f(x_2)+(x_1-x_2)(x_1^2+x_2^2+x_1x_2)=f(x_1-x_2)+f(x_2)-3(x_1-x_2)x_2[(x_1-x_2)+x_2]-f(x_2)+(x_1-x_2)(x_1^2+x_2^2+x_1x_2)=f(x_1-x_2)-3x_1x_2(x_1-x_2)+(x_1-x_2)(x_1^2+x_2^2+x_1x_2)=f(x_1-x_2)+(x_1-x_2)(x_1^2+x_2^2-2x_1x_2)=f(x_1-x_2)+(x_1-x_2)^3$，因为当 $x>0$ 时，$f(x)+x^3>0$ 恒成立，$x_1-x_2>0$，所以 $f(x_1-x_2)+(x_1-x_2)^3>0$，即 $h(x_1)-h(x_2)>0$，则 $h(x_1)>h(x_2)$，故 $y=f(x)+x^3$ 为增函数，故 D 正确. 故选 ABD.

12. e 【解析】∵$f(x)=\ln x$，∴$f'(x)=\frac{1}{x}$，则$f'(x_0)=\frac{1}{x_0}$，又$f(x_0)=\ln x_0$，∴$f(x)$的图象在点$P(x_0,f(x_0))$处的切线方程为$y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$，把$(0,0)$代入切线方程，可得$-\ln x_0=-1$，解得$x_0=e$.

13. $24\pi$ $[\pi,6\pi]$ 【解析】由题意，在三棱锥$P\text{-}AEF$中，$AP\perp PE$，$PE\perp PF$，$PF\perp PA$，$PA=4$，$PE=PF=2$，故可将三棱锥补形为长、宽、高分别为2，2，4的长方体，如图所示，则三棱锥$P\text{-}AEF$的外接球即为长方体的外接球，设三棱锥$P\text{-}AEF$的外接球的半径为$R$，则$(2R)^2=2^2+2^2+4^2=24$，得$R=\sqrt{6}$，所以三棱锥$P\text{-}AEF$外接球的表面积$S=4\pi R^2=24\pi$. 设三棱锥$P\text{-}AEF$的外接球球心为$O$，$EF$的中点为$O_1$，连接$OM$，$OO_1$，$O_1M$，则$OO_1\perp$平面$PEF$，$OO_1=2$，$O_1M=1$，则$OM=\sqrt{5}$. 过点$M$的平面截三棱锥$P\text{-}AEF$的外接球所得截面为圆，其中最大的截面为过球心$O$的大圆，此时截面的面积为$\pi R^2=\pi(\sqrt{6})^2=6\pi$，最小的截面是以$M$为圆心且垂直于$OM$的圆，此时截面圆的半径$r=\sqrt{R^2-OM^2}=\sqrt{6-5}=1$，故截面的面积为$\pi r^2=\pi$，所以过点$M$的平面截三棱锥$P\text{-}AEF$的外接球所得截面的面积的取值范围为$[\pi,6\pi]$.




14. 2 【解析】若$a\leqslant\frac{1}{b}$，则$ab\leqslant1$，此时$\min\left\{a,\frac{1}{b},\frac{1}{a}+3b\right\}=\min\left\{a,\frac{1}{a}+3b\right\}$，因为$a\left(\frac{1}{a}+3b\right)=1+3ab\leqslant4$，所以$a$和$\frac{1}{a}+3b$中至少有一个小于或等于2，所以$\min\left\{a,\frac{1}{a}+3b\right\}\leqslant2$，又当$a=2,b=\frac{1}{2}$时，$a=\frac{1}{b}=\frac{1}{a}+3b=2$，所以$\min\left\{a,\frac{1}{b},\frac{1}{a}+3b\right\}$的最大值为2. 若$a>\frac{1}{b}$，则$ab>1$，此时$\min\left\{a,\frac{1}{b},\frac{1}{a}+3b\right\}=\min\left\{\frac{1}{b},\frac{1}{a}+3b\right\}$，因为$\frac{1}{b}\left(\frac{1}{a}+3b\right)=\frac{1}{ab}+3<4$，所以$\frac{1}{b}$和$\frac{1}{a}+3b$中至少有一个小于2，所以$\min\left\{a,\frac{1}{b},\frac{1}{a}+3b\right\}<2$. 综上，$\min\left\{a,\frac{1}{b},\frac{1}{a}+3b\right\}$的最大值为2.

## 小题2 "8+3+3"73分练

1. A 【解析】因为$|1+\sqrt{3}i|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$，所以由$z(1+i)=|1+\sqrt{3}i|$，得$z=\frac{2}{1+i}=\frac{2(1-i)}{(1-i)(1+i)}=1-i$. 故选A.

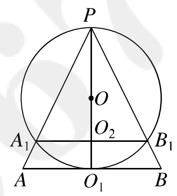
2. C 【解析】当$x<2$时，$2^x<4$，因为"$\forall x<2,2^x<a$"为真命题，所以$a\geqslant4$，故实数$a$的取值范围为$[4,+\infty)$. 故选C.

3. D 【解析】由题易知$\mu=90$，由正态曲线的对称性可知$P(X>110)=0.5-\frac{1}{2}P(70\leqslant X\leqslant110)=0.5-0.4=0.1$，则该市这次考试数学成绩超过110分的考生人数约为$0.1\times50\ 000=5000$. 故选D.

4. C 【解析】令$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0$，得$2x+\frac{\pi}{3}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，则$x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$. 当$k=1$时，$x=\frac{\pi}{3}$；当$k=2$时，$x=\frac{5}{6}\pi$；当$k=3$时，$x=\frac{4}{3}\pi$；当$k=4$时，$x=\frac{11}{6}\pi$. 所以$f(x)$在$(0,2\pi)$内共有4个零点. 故选C.

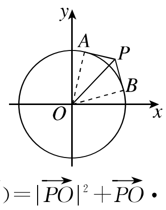
5. B 【解析】依题意，$a_2=2a_1=2$，当$n\in\mathbf{N}^*$且$n\geqslant2$时，$a_{2n}=2a_{2n-1}=2a_{2n-2}+2$，所以$a_{2n}+2=2(a_{2n-2}+2)$，可知数列$\{a_{2n}+2\}$是以$a_2+2=4$为首项，以2为公比的等比数列，所以$a_{2n}+2=2^{n+1}$，得$a_{2n}=2^{n+1}-2$，所以$a_{20}=2^{11}-2$. 故选B.

6. A 【解析】根据题意，以圆锥的高为直径的球的半径为1，且球与圆锥底面相切于圆锥的底面圆心. 如图，作圆锥$PO_1$的轴截面$PAB$，设$AB$的中点为$O_1$，连接$PO_1$，设$PO_1$的中点为$O$，圆$O$与$PA$，$PB$的交点分别为$A_1,B_1$（$A_1,B_1$均不与$P$重合），连接$A_1B_1$，设$A_1B_1$的中点为$O_2$. 由题知$PA=PB=\sqrt{5}$，$\tan\angle APO_1=\frac{1}{2}$，设$\angle APB=\alpha$，则$\sin\alpha=\sin(\pi-2\angle PAB)=\sin2\angle PAB=2\sin\angle PAB\cos\angle PAB=2\times\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$. 设$A_1O_2=r$，则$2=\frac{2r}{\sin\alpha}$，得$r=\frac{4}{5}$，则$PO_2=\frac{r}{\tan\angle APO_1}=\frac{8}{5}$，则所求体积$V=\pi\times\left(\frac{8}{5}\right)^2\times\left(1-\frac{8}{15}\right)-\frac{\pi}{3}\times\left(\frac{4}{5}\right)^2\times\frac{8}{5}=\frac{64\pi}{75}$. 故选A.




7. C 【解析】①当$a<0$时，若$x<a$，则$f(x)=e^x+a$，因为函数$f(x)=e^x+a$在$(-\infty,a)$上单调递增，所以$a<f(x)<e^a+a$；若$x\geqslant a$，则$f(x)=x^2+2ax=(x+a)^2-a^2\geqslant-a^2$，当且仅当$x=-a$时取等号. 因为$f(x)$不存在最小值，所以$-a^2>a$，所以$-1<a<0$. ②当$a\geqslant0$时，若$x<a$，则$f(x)=e^x+a$，因为函数$f(x)=e^x+a$在$(-\infty,a)$上单调递增，所以$a<f(x)<e^a+a$；若$x\geqslant a$，则$f(x)=x^2+2ax=(x+a)^2-a^2\geqslant f(a)=3a^2$，当且仅当$x=a$时取等号. 因为$f(x)$不存在最小值，所以$3a^2>a$，所以$a>\frac{1}{3}$. 综上，实数$a$的取值范围是$(-1,0)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$. 故选C.

8. A 【解析】如图，连接$OA,OB$，则$PA\perp OA$，$PB\perp OB$，设$P(x,y)$，则$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{x^2+y^2}$，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB})=|\overrightarrow{PO}|^2+\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$，由题知$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB=\cos\angle AOB=\cos2\angle POA=2\cos^2\angle POA-1=2\times\frac{|\overrightarrow{OA}|^2}{|\overrightarrow{OP}|^2}-1=\frac{2}{x^2+y^2}-1$，$\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{PO}|\cdot|\overrightarrow{OA}|\cos(180^\circ-\angle POA)=-|\overrightarrow{PO}|\cdot|\overrightarrow{OA}|\cos\angle POA=-|\overrightarrow{PO}|\cdot|\overrightarrow{OA}|\cdot\frac{|\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{OP}|}=-1$，故$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x^2+y^2-2+\frac{2}{x^2+y^2}-1\geqslant2\sqrt{(x^2+y^2)\cdot\frac{2}{x^2+y^2}}-3=2\sqrt{2}-3$，当且仅当$x^2+y^2=\frac{2}{x^2+y^2}$，即$x^2+y^2=\sqrt{2}$时，等号成立，故当$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的值最小时，点$P$到圆心$O$的距离为$\sqrt[4]{2}$. 故选A.




9. ACD 【解析】由题可得$\bar{x}=\frac{1}{5}\times(9+9.5+10+10.5+11)=10$，故A正确. $r=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{-8}{\sqrt{2.5\times26}}=\frac{-8}{\sqrt{65}}\approx-0.99$，故$y$与$x$的线性相关性很强，从而可以用一元线性回归模型拟合$y$与$x$的关系，且$y$与$x$负相关，故B错误，C，D正确. 故选ACD.

10. BD 【解析】抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，准线方程为$x=-\frac{p}{2}$，又点$M(2,\sqrt{3})$满足$|MF|=2|OF|$，所以$\sqrt{\left(\frac{p}{2}-2\right)^2+(0-\sqrt{3})^2}=2\times\frac{p}{2}$，即$3p^2+8p-28=0$，解得$p=2$或$p=-\frac{14}{3}$（舍去），所以抛物线$C$：$y^2=4x$，则$C$的准线方程为$x=-1$，焦点为$F(1,0)$，故A错误；易知点$M$在抛物线内，过点$P$作准线$x=-1$的垂线，垂足为$H$，连接$MH$，则$|MH|_{\min}=$

3,由抛物线的定义可知$|PH|=|PF|$,所以$\triangle PMF$的周长为$|PM|+|MF|+|PF|=|PM|+|MF|+|PH|=|PM|+|PH|+2\geqslant|MH|+2\geqslant3+2=5$,当且仅当$M,P,H$三点共线时,$\triangle PMF$的周长取得最小值5,故B正确;因为$k_{MF}=\frac{\sqrt{3}-0}{2-1}=\sqrt{3}$,所以直线$MF$的倾斜角为$\frac{\pi}{3}$,故C错误;过点$M$作$OF$的平行线,交抛物线于点$P$,由$\begin{cases}y^2=4x,\\y=\sqrt{3},\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\frac{3}{4},\\y=\sqrt{3},\end{cases}$即$P\left(\frac{3}{4},\sqrt{3}\right)$,则$|MP|=2-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}\neq|OF|$,所以四边形$OPMF$不可能是平行四边形,故D正确.故选BD.

11. ABD 【解析】由题可知,两个函数图象都在$x$轴及其上方,所以函数$f(x)$是增函数,故虚线部分为$y=f'(x)$的图象,实线部分为$y=f(x)$的图象.令$g(x)=f(x)\cdot e^x$,则$g'(x)=f'(x)\cdot e^x+f(x)\cdot e^x=[f'(x)+f(x)]\cdot e^x>0$恒成立,故$g(x)=f(x)\cdot e^x$在$\mathbf{R}$上单调递增,则$g(x)$没有最值,故A,B中结论均错误.令$h(x)=\frac{f(x)}{e^x}$,则$h'(x)=\frac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{(e^x)^2}=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$,由图可知,当$x\in(-\infty,0)$时,$h'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}>0$,故$h(x)=\frac{f(x)}{e^x}$单调递增,当$x\in(0,+\infty)$时,$h'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}<0$,故$h(x)=\frac{f(x)}{e^x}$单调递减,所以函数$h(x)=\frac{f(x)}{e^x}$在$x=0$处取得最大值,最大值为$\frac{f(0)}{e^0}=1$,故C中结论正确,D中结论错误.故选ABD.

12. $\frac{7}{8}$ 【解析】$\because\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$,$\therefore\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left[\frac{\pi}{2}+\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\right]=-\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=1-2\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=1-2\times\frac{1}{16}=\frac{7}{8}$.

13. 24 【解析】因为$(x+2y)(x-y)^6=(x+2y)(C_6^0x^6-C_6^1x^5y+C_6^2x^4y^2-C_6^3x^3y^3+C_6^4x^2y^4-C_6^5xy^5+C_6^6y^6)$,所以$x^2y^5$的系数为$-C_6^5+2C_6^4=24$.

14. $\{9,12,21\}$ 【解析】由题意设$x^2-80=y^2\geqslant0(x\in\mathbf{N}^*,y\in\mathbf{N})$,则$(x-y)(x+y)=80$,可得$0<x-y<x+y$.因为$(x-y)+(x+y)=2x$且$2x$是偶数,所以$x-y$与$x+y$的奇偶性相同.因为$(x-y)(x+y)=80$且80是偶数,所以$x-y$与$x+y$必然都是偶数,故满足题意的数组$(x-y,x+y)$有(2,40),(4,20),(8,10)三种情况,所以正整数$x$的取值是$\frac{2+40}{2}=21$,$\frac{4+20}{2}=12$,$\frac{8+10}{2}=9$,即正整数$x$的取值组成的集合是$\{9,12,21\}$.

## 小题3 "8+3+3"73分练

1. A 【解析】由题知$N=\{y|y>1\}$,又$M=\{x|-2\leqslant x\leqslant2\}$,所以$M\cup N=\{x|x\geqslant-2\}$.故选A.

2. A 【解析】由$z(1+i)=i^{2024}$得$z=\frac{i^{2024}}{1+i}=\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$,故$z$的虚部为$-\frac{1}{2}$.故选A.

3. B 【解析】由双曲线的焦距为4可得$2c=4$,即$c=2$,又$a=1$,所以$c^2=1+b^2=4$,可得$b^2=3$,即$b=\sqrt{3}$,则C的渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\sqrt{3}x$.故选B.

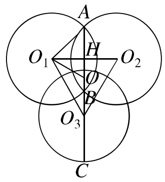
4. D 【解析】因为$\sin2\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=-\frac{4}{5}$,所以$1+\tan^2\alpha=-\frac{5}{2}\tan\alpha$,所以$\frac{\tan2\alpha}{\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\times\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{(1+\tan\alpha)^2}=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha+2\tan\alpha}=-4$.故选D.

5. D 【解析】因为$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$,$P(A)=\frac{3}{5}$,$P(A\overline{B})=\frac{1}{5}$,所以$P(AB)=P(A)-P(A\overline{B})=\frac{2}{5}$,又$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{2}$,所以$P(B)=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}}=\frac{4}{5}$.故选D.

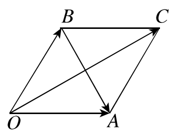
6. B 【解析】因为$f(x)$为奇函数且满足$f(1+x)=f(1-x)$,所以$f[(x+1)+1]=f[1-(x+1)]$,即$f(x+2)=f(-x)=-f(x)$,所以$f(x+4)=f[(x+2)+2]=-f(x+2)=-[-f(x)]=f(x)$,所以$f(x)$是周期为4的周期函数.因为$5=\log_2 32<\log_2 36<\log_2 64=6$,所以$0<6-\log_2 36<1$,所以$f(\log_2 36)=f(\log_2 36-4)=-f(4-\log_2 36)=f(4-\log_2 36+2)=f(6-\log_2 36)=2^{6-\log_2 36}=\frac{2^6}{2^{\log_2 36}}=\frac{64}{36}=\frac{16}{9}$.故选B.

7. D 【解析】由$a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+3}$,$a_n\neq0$,得$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+3}{a_n}=2+\frac{3}{a_n}$,则$\frac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}}=3+\frac{3}{a_n}=3\cdot\frac{a_n+1}{a_n}$,由题知$a_n+1\neq0$,则$\frac{\frac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}}}{\frac{a_n+1}{a_n}}=3$,即数列$\left\{\frac{a_n+1}{a_n}\right\}$是公比为3的等比数列,所以$\frac{a_{2025}+1}{a_{2025}}$与$\frac{a_{2024}+1}{a_{2024}}$的比值为3.故选D.

8. C 【解析】要求出被完全覆盖的最大的圆的半径,由圆的对称性知只需考虑三个圆的圆心构成等边三角形的情况,设三个半径为1的圆的圆心分别为$O_1,O_2,O_3$,被覆盖的圆的圆心为$O$.如图,设圆$O_1$与圆$O_2$交于$A,B$两点,连接$AB$并延长,交圆$O_3$于点$C$($B$在$A,C$之间),连接$O_1O_2,O_2O_3,O_3O_1$,设$O_1O_2\cap AB=H$,显然$O$为正三角形$O_1O_2O_3$的中心.连接$O_1A,OO_1$,设$OO_1=OO_3=x$,则$O_1H=\frac{\sqrt{3}x}{2}$,$OH=\frac{x}{2}$,所以$HA=\sqrt{O_1A^2-O_1H^2}=\sqrt{1-\frac{3}{4}x^2}$,则$OA=OH+HA=\frac{x}{2}+\sqrt{1-\frac{3}{4}x^2}=\frac{1}{2}(x+\sqrt{4-3x^2})$,由$\begin{cases}4-3x^2>0,\\x>0,\end{cases}$得$0<x<\frac{2\sqrt{3}}{3}$,又$OC=OO_3+O_3C=x+1>OA$,因此圆$O$的最大半径为$OA$.令$f(x)=\frac{1}{2}(x+\sqrt{4-3x^2})\left(0<x<\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$,得$f'(x)=\frac{\sqrt{4-3x^2}-3x}{2\sqrt{4-3x^2}}$,由$f'(x)=0$,得$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$,当$0<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$时,$f'(x)>0$,当$\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{2\sqrt{3}}{3}$时,$f'(x)<0$,因此$f(x)$在$\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$上单调递增,在$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$上单调递减,所以$f(x)_{\max}=f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,所以被完全覆盖的最大的圆的半径为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$,此时$O_1O_2=O_2O_3=O_3O_1=1$,即圆$O_1$、圆$O_2$、圆$O_3$中的任一圆均经过另外两圆的圆心.故选C.

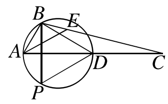



9. BC 【解析】如图,连接$AB,BC,CA$,由题知四边形$OACB$是平行四边形,$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.因为$OC$平分$\angle AOB$,所以平行四边形$OACB$是菱形,即$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$.对于A,$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不一定垂直,故A错误;对于B,$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=0$,即$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,故B正确;对于C,$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{a}+$

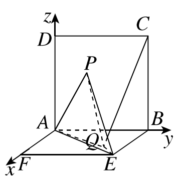


$\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，$\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\frac{\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，故 C 正确；对于 D，由选项 A 知，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 不一定为 0，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 与 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 不一定相等，故 D 错误. 故选 BC.

10. ACD 【解析】在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $BC^2=1+4^2-2\times1\times4\times\cos\frac{\pi}{3}=13$，则 $BC=\sqrt{13}$，由 $AE$ 平分 $\angle BAC$ 得 $BE:EC=BA:AC=1:4$，则 $BE=\frac{1}{5}BC=\frac{\sqrt{13}}{5}$，所以 A 正确；由 $S_{\triangle ABE}+S_{\triangle ACE}=S_{\triangle ABC}$ 得 $\frac{1}{2}\times AE\times1\times\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\times AE\times4\times\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\times1\times4\times\sin\frac{\pi}{3}$，解得 $AE=\frac{4\sqrt{3}}{5}$，所以 B 错误；$S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}\times AE\times1\times\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{5}$，所以 C 正确；如图，在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理得 $BD=\sqrt{1+2^2-2\times2\times1\times\cos\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}$，由题知 $\angle BPD=\frac{\pi}{3}$，设 $\angle PBD=\theta$，则 $\angle PDB=\frac{2\pi}{3}-\theta$，在 $\triangle BPD$ 中，由正弦定理得 $\frac{PD}{\sin\theta}=\frac{BP}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)}=\frac{BD}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$，所以 $PB+\frac{1}{2}PD=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)+\sin\theta=\sqrt{3}\cos\theta+2\sin\theta=\sqrt{7}\sin(\theta+\varphi)\leqslant\sqrt{7}$，其中 $\tan\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$，当 $\sin(\theta+\varphi)=1$ 时，$PB+\frac{1}{2}PD$ 取得最大值 $\sqrt{7}$，所以 D 正确. 故选 ACD.




11. ACD 【解析】由题知平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABEF$，$DA\perp AB$，所以 $DA\perp$ 平面 $ABEF$，则 $DA\perp AF$，又四边形 $ABEF$ 是矩形，所以 $AB\perp AF$，以 $A$ 为原点 $AF,AB,AD$ 所在直线分别为 $x,y,z$ 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A(0,0,0)$，$F(1,0,0)$，$B(0,2,0)$，$D(0,0,2)$，$C(0,2,2)$，$E(1,2,0)$，设 $P(0,m,n)$，$Q(s,t,0)$，其中 $0\leqslant m,n\leqslant2$，$0\leqslant s\leqslant1$. 对于 A，$\overrightarrow{PQ}=(s,t-m,-n)$，则 $|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{s^2+(t-m)^2+n^2}$，当 $s=1,t=n=2,m=0$ 时，$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{1+4+4}=3$，故存在点 $P,Q$，使得 $PQ=3$，故 A 正确；对于 B，$\overrightarrow{CQ}=(s,t-2,-2)$，$\overrightarrow{EP}=(-1,m-2,n)$，假设存在点 $P,Q$，使得 $CQ/\!/EP$，则存在实数 $\lambda$，使得 $\overrightarrow{CQ}=\lambda\overrightarrow{EP}$，即 $\begin{cases}s=-\lambda,\\t-2=\lambda(m-2),\\-2=n\lambda,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}s(m-2)=-(t-2),\\sn=2,\end{cases}$ 由 $0\leqslant m,n,t\leqslant2$，$0\leqslant s\leqslant1$，$sn=2$，可得 $s=1,n=2$，此时有 $m-2=-(t-2)$，即 $m+t=4$，可得 $m=t=2$，此时 $Q$ 与 $E$ 重合，$P$ 与 $C$ 重合，假设不成立，故不存在点 $P,Q$，使得 $CQ/\!/EP$，故 B 错误；对于 C，由题知点 $P$ 到直线 $AD$ 的距离为 $m$，点 $P$ 到直线 $EF$ 的距离为 $\sqrt{1+n^2}$，由 $m=\sqrt{1+n^2}$，得 $m^2-n^2=1$，$0\leqslant m,n\leqslant2$，故点 $P$ 的轨迹为双曲线右支的一部分，即满足题意的点 $P$ 有无数个，故 C 正确；对于 D，$\overrightarrow{AP}=(0,m,n)$，$\overrightarrow{EP}=(-1,m-2,n)$，由 $PA\perp PE$，得 $m(m-2)+n^2=0$，则 $n^2=1-(m-1)^2\in[0,1]$，由题知三棱锥 $P\text{-}AQE$ 的高为 $n$，又 $S_{\triangle AQE}\leqslant\frac{1}{2}S_{矩形ABEF}=\frac{1}{2}\times1\times2=1$，故 $V_{P\text{-}AQE}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle AQE}\times n\leqslant\frac{1}{3}\times1\times1=\frac{1}{3}$，故 D 正确. 故选 ACD.




12. 6 【解析】由题意知这组数据的极差是 $57-1=56$. 由 $10\times30\%=3$，得这组数据的第 30 百分位数为 $\frac{a+10}{2}$，故 $56=7\times\frac{a+10}{2}$，得 $a=6$.

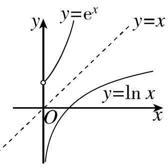
13. $\sqrt{2}-1$ 【解析】设椭圆的焦距为 $2c$ $(c>0)$，则 $F(c,0)$，由题知 $c=\frac{p}{2}$，因为 $PF\perp x$ 轴，所以 $x_P=c$，$y_P^2=2pc=4c^2$. 不妨取 $P(c,2c)$，由点 $P$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上，得 $\frac{c^2}{a^2}+\frac{4c^2}{a^2-c^2}=1$，化简得 $c^4-6a^2c^2+a^4=0$，即 $e^4-6e^2+1=0$，解得 $e^2=3\pm2\sqrt{2}$，因为 $0<e<1$，所以 $e=\sqrt{2}-1$.

14. $\frac{\sqrt{2\mathrm{e}}}{2}$ 【解析】函数 $f(x)=\mathrm{e}^{ax}(a\neq0)$ 的导数为 $f'(x)=a\cdot\mathrm{e}^{ax}$，$f(a)=\mathrm{e}^{a^2}$，可得 $P(a,\mathrm{e}^{a^2})$，故过点 $P$ 的切线的斜率为 $a\mathrm{e}^{a^2}$，切线的方程为 $y-\mathrm{e}^{a^2}=a\mathrm{e}^{a^2}(x-a)$，令 $y=0$，可得 $x=-\frac{1}{a}+a$，即 $B\left(-\frac{1}{a}+a,0\right)$. 在直角三角形 $PAB$ 中，$|AB|=\frac{1}{|a|}$，$|AP|=\mathrm{e}^{a^2}$，则 $\triangle APB$ 的面积 $S(a)=\frac{1}{2}|AB||AP|=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{|a|}\cdot\mathrm{e}^{a^2}(a\neq0)$，因为 $S(-a)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{|a|}\cdot\mathrm{e}^{a^2}=S(a)$，所以函数 $S(a)$ 为偶函数. 不妨取 $a>0$，则 $S(a)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}\cdot\mathrm{e}^{a^2}$，则 $S'(a)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a^2}\cdot\mathrm{e}^{a^2}+\frac{1}{a}\cdot\mathrm{e}^{a^2}\cdot2a\right)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{a^2}\left(-\frac{1}{a^2}+2\right)$，当 $a\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时，$S'(a)<0$，$S(a)$ 单调递减；当 $a\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 时，$S'(a)>0$，$S(a)$ 单调递增. 故 $S(a)$ 的最小值为 $S\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2\mathrm{e}}}{2}$，即 $\triangle APB$ 面积的最小值为 $\frac{\sqrt{2\mathrm{e}}}{2}$.

## 小题 4 “8+3+3”73 分练

1. D 【解析】因为 $B=\{x\mid x^3=x\}=\{-1,0,1\}$，所以 $A\cap B=\{-1,0,1\}$. 故选 D.

2. A 【解析】函数 $y=\mathrm{e}^x$ 与 $y=\ln x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，作出函数 $y=\mathrm{e}^x$，$y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上的图象，如图所示，数形结合可知，命题 $p$：$\forall x\in(0,+\infty)$，$\mathrm{e}^x>\ln x$ 为真命题. $p$ 的否定：$\exists x\in(0,+\infty)$，$\mathrm{e}^x\leqslant\ln x$. 故选 A.




3. C 【解析】因为 $\sin18^\circ=m$，所以 $\cos18^\circ=\sqrt{1-m^2}$，则 $\sin63^\circ=\sin(18^\circ+45^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin18^\circ+\cos18^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{2}(m+\sqrt{1-m^2})$. 故选 C.

4. B 【解析】连接 $BD$，由 $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}|$，得 $|\overrightarrow{DB}|=|\overrightarrow{AB}|$，又四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $\triangle ABD$ 是正三角形，则 $\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AB}|\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2$，因此 $\overrightarrow{AD}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量为 $\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|^2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，所以 $\lambda=\frac{1}{2}$. 故选 B.

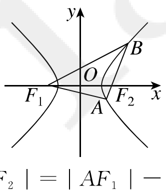
5. C 【解析】因为 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，$f(x)$ 的图象是一条连续不断的曲线，且 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上也单调递增，$f(0)=0$，故 $f(x)$ 是增函数. 对于 A，不妨令 $f(x)=x$，则 $y=f(x)+x^2=x+x^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，此时 $y=f(x)+x^2$ 在 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，

在$\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递增，故A错误；对于B，不妨令$f(x)=x$，则$y=f(x)-x^2=x-x^2=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$，此时$y=f(x)-x^2$在$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递减，故B错误；对于C，$y=x^2f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，又$(-x)^2f(-x)=-x^2f(x)$，所以$y=x^2f(x)$是奇函数，取$0<x_1<x_2$，则$0<x_1^2<x_2^2$，$0<f(x_1)<f(x_2)$，故$x_1^2f(x_1)<x_2^2f(x_2)$，所以函数$y=x^2f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，则函数$y=x^2f(x)$在$(-\infty,0)$上也单调递增，且当$x=0$时，$y=x^2f(x)=0$，所以$y=x^2f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，故C正确；对于D，不妨令$f(x)=x$，则$y=\frac{f(x)}{x^2}=\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}$，此时$y=\frac{f(x)}{x^2}$在$(0,+\infty)$上单调递减，故D错误. 故选C.

6. B 【解析】设函数$f(x)=e^x-x-1$，则$f'(x)=e^x-1$，当$x<0$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当$x>0$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增. 所以$f(x)\geqslant f(0)=0$，即$e^x\geqslant x+1$. 因为$S_3=e^{S_4}\geqslant S_4+1$，所以$S_3-S_4\geqslant1$，即$a_4\leqslant-1$. 因为$a_4=a_1q^3$，$a_1>1$，所以$q<0$，排除A,C. 若$q=-1$，$a_1=2$，则$S_3=2$，$S_4=0$，不满足$S_3=e^{S_4}$，排除D. 故选B.

7. B 【解析】由$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$及$\omega>0$，可得$\omega x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\omega-\frac{\pi}{6}\right]$，因为$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的取值范围为$[-1,2]$，且$2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-1$，所以$\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}\omega-\frac{\pi}{6}\leqslant\pi+\frac{\pi}{6}$，解得$\frac{4}{3}\leqslant\omega\leqslant\frac{8}{3}$. 故选B.

8. D 【解析】设$|F_1F_2|=2c(c>0)$. 如图，因为双曲线$E$的离心率为$\sqrt{2}$，所以$c=\sqrt{2}a$，因为$|AB|=|AF_1|$，所以$|BF_2|=|AB|-|AF_2|=|AF_1|-|AF_2|=2a$，由双曲线的定义可得$|BF_1|-|BF_2|=|BF_1|-2a=2a$，所以$|BF_1|=4a=2|BF_2|$. 在$\triangle BF_1F_2$中，由余弦定理得$\cos\angle BF_2F_1=\frac{|BF_2|^2+|F_1F_2|^2-|BF_1|^2}{2|BF_2|\cdot|F_1F_2|}=\frac{4a^2+8a^2-16a^2}{2\times2a\times2\sqrt{2}a}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$，在$\triangle AF_1F_2$中，$\cos\angle F_1F_2A=-\cos\angle F_1F_2B=\frac{\sqrt{2}}{4}$，设$|AF_2|=m(m>0)$，则$|AF_1|=m+2a$，由$|AF_1|^2=|F_1F_2|^2+|AF_2|^2-2|F_1F_2||AF_2|\cos\angle F_1F_2A$，得$(2a+m)^2=(2\sqrt{2}a)^2+m^2-2\times2\sqrt{2}a\times m\times\frac{\sqrt{2}}{4}$，解得$m=\frac{2}{3}a$，所以$|AF_1|=\frac{8a}{3}$，所以在$\triangle BAF_1$中，$\cos\angle BAF_1=\frac{|AF_1|^2+|AB|^2-|BF_1|^2}{2|AF_1|\cdot|AB|}=\frac{\frac{64a^2}{9}+\frac{64a^2}{9}-16a^2}{2\times\frac{8a}{3}\times\frac{8a}{3}}=-\frac{1}{8}$. 故选D.




9. ABC 【解析】由题设得$\frac{20+21+22+23+24+25}{6}=\frac{a+23+24+25+26+27}{6}-3$，解得$a=28$. 对于A，$6\times70\%=4.2$，故甲组数据的第70百分位数为24，A中结论错误；对于B，甲组数据的极差为$25-20=5$，乙组数据的极差为$28-23=5$，所以甲、乙两组数据的极差相同，B中结论错误；对于C，乙组数据按从小到大排列为23，24，25，26，27，28，故乙组数据的中位数为$\frac{25+26}{2}=25.5$，C中结论错误；对于D，甲组数据的平均数为$\frac{20+21+22+23+24+25}{6}=22.5$，乙组数据的平均数为$\frac{28+23+24+25+26+27}{6}=25.5$，所以甲组数据的方差为$\frac{1}{6}\times[(-2.5)^2+(-1.5)^2+(-0.5)^2+0.5^2+1.5^2+2.5^2]=\frac{35}{12}$，乙组数据的方差为$\frac{1}{6}\times[2.5^2+(-2.5)^2+(-1.5)^2+(-0.5)^2+0.5^2+1.5^2]=\frac{35}{12}$，故两组数据的方差相同，D中结论正确. 故选ABC.

10. ACD 【解析】依题意，心形线$C$过原点$O(0,0)$. 对于A,B，由$\overrightarrow{OP_1}//\overrightarrow{OP_2}$，可知$O,P_1,P_2$三点共线，则$x_1x_2<0$，设直线$P_1P_2$的方程为$y=tx$，由$\begin{cases}x^2+y^2+y=\sqrt{x^2+y^2},\\y=tx,\end{cases}$消去$y$，得$(1+t^2)x^2-\sqrt{1+t^2}|x|+tx=0$，不妨设$x_1>0,x_2<0$，则$x_1=\frac{\sqrt{1+t^2}-t}{1+t^2}$，$x_2=\frac{-\sqrt{1+t^2}-t}{1+t^2}$，所以$|P_1P_2|=\sqrt{1+t^2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{1+t^2}\cdot\frac{2\sqrt{1+t^2}}{1+t^2}=2$，$|OP_1|\cdot|OP_2|=\sqrt{1+t^2}\cdot\left|\frac{\sqrt{1+t^2}-t}{1+t^2}\right|\cdot\sqrt{1+t^2}\cdot\left|\frac{-\sqrt{1+t^2}-t}{1+t^2}\right|=\frac{1}{1+t^2}$，当$t\neq0$时，$|OP_1|\cdot|OP_2|\neq1$，故选项A正确，选项B错误. 对于C,D，设点$P(x,y)$在心形线$C$上，$\angle POx=\alpha$，由心形线$C$的方程可得$|OP|^2+|OP|\sin\alpha=|OP|$，即$|OP|\cdot(|OP|+\sin\alpha-1)=0$，当$P$与$O$重合时，$|OP|=0$，当$P$与$O$不重合时，$|OP|=1-\sin\alpha\leqslant2$，又$x_1x_2\neq0$，所以$|OP_1|+|OP_2|<4$，故选项C正确. 由$|OP|=\sqrt{x^2+y^2}\leqslant2$，可知$-2\leqslant y\leqslant2$，令$m=\sqrt{x^2+y^2}(m\geqslant0)$，则心形线$C$的方程可化为$m^2-m+y=0$，又$\Delta=1-4y\geqslant0$，所以$-2\leqslant y\leqslant\frac{1}{4}$，当$y=0$时，由$m^2-m=0$，解得$m=0$或$m=1$，进而可得$x=\pm1$或0；当$y=-1$时，由$m^2-m-1=0$，得$m=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，此时$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\sqrt{x^2+1}$无整数解；当$y=-2$时，由$m^2-m-2=0$，得$m=2$，所以$x=0$. 所以$C$上有4个整点$(-1,0)$，$(1,0)$，$(0,0)$，$(0,-2)$，故选项D正确. 故选ACD.

11. ABC 【解析】对于A，若$f(x)=\sin x$，则$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$，$f^{(2)}(x)=-\sin x=\sin(x+\pi)$，$f^{(3)}(x)=-\cos x=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$，$f^{(4)}(x)=\sin x=\sin(x+2\pi)$，观察可知$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$，A正确；对于B，若$f(x)=\frac{1}{x}$，则$f'(x)=-\frac{1}{x^2}=-x^{-2}$，$f^{(2)}(x)=(-x^{-2})'=2x^{-3}=(-1)^2(2!)x^{-3}$，$f^{(3)}(x)=(2x^{-3})'=-6x^{-4}=(-1)^3(3!)x^{-4}$，$f^{(4)}(x)=(-6x^{-4})'=24x^{-5}=(-1)^4(4!)x^{-5}$，观察可知$f^{(n)}(x)=(-1)^n(n!)x^{-(n+1)}$，B正确；对于C，$f(x)=e^x$的$n$阶导数为$f^{(n)}(x)=e^x$，得$T_3(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}(x-0)+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}(x-0)^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x-0)^3=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$，C正确；对于D，记$g(x)=\cos x$，则$g'(x)=-\sin x$，$g^{(2)}(x)=-\cos x$，$g^{(3)}(x)=\sin x$，因为$g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$，$g'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$g^{(2)}\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$，$g^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$g(x)$在$x=\frac{\pi}{3}$处的3次泰勒多项式为$T_3(x)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{12}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3$，$T_3(1)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{4}\left(1-\frac{\pi}{3}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{12}\left(1-\frac{\pi}{3}\right)^3=\frac{1}{2}-$

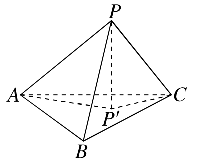
$\frac{\sqrt{3}(3-\pi)}{6}-\frac{(3-\pi)^2}{36}+\frac{\sqrt{3}(3-\pi)^3}{324}\approx\frac{1}{2}-\frac{1.732\times(-0.142)}{6}-\frac{(-0.142)^2}{36}+\frac{1.732\times(-0.142)^3}{324}\approx0.54$，D 错误．故选 ABC.

12. $\sqrt{34}$ 【解析】$f(x)=x\ln x-1$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\ln x+1$，则切线 $l$ 的斜率 $k=f'(1)=1$，又 $f(1)=\ln 1-1=-1$，所以切线 $l$ 的方程为 $y-(-1)=x-1$，即 $x-y-2=0$．圆 $C$ 的圆心为 $C(1,0)$，半径 $r=3$，设圆心 $C$ 到直线 $l$ 的距离为 $d$，则 $d=\frac{|1-0-2|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{9-\frac{1}{2}}=\sqrt{34}$.

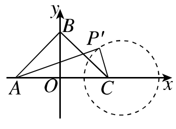
13. 576 【解析】符合题意的一种填法如图所示，行交换有 $A_4^4=24$（种）方法，列交换有 $A_4^4=24$（种）方法，所以根据分步乘法计数原理得不同的填表方式共有 $A_4^4\cdot A_4^4=24\times24=576$（种）.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 4 | 3 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |
| 3 | 4 | 2 | 1 |

14. $16\pi$ 【解析】如图①，设点 $P$ 在平面 $ABC$ 内的射影为 $P'$，连接 $PP'$，$P'A$，$P'C$，则 $\angle PAP'$ 为直线 $PA$ 与平面 $ABC$ 所成的角，即 $\angle PAP'=\alpha$，$\angle PCP'$ 为直线 $PC$ 与平面 $ABC$ 所成的角，即 $\angle PCP'=\beta$，因为 $\beta=2\alpha=60^\circ$，所以 $\alpha=30^\circ$，$P'P=\sqrt{3}P'C$，$P'P=\frac{\sqrt{3}}{3}P'A$，所以 $3P'C=P'A$．如图②，在平面 $ABC$ 内，以 $AC$ 所在直线为 $x$ 轴，线段 $AC$ 的垂直平分线为 $y$ 轴建立平面直角坐标系 $xOy$，因为 $AB=BC=2\sqrt{2}$，且 $AB\perp BC$，所以 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=4$，得 $OB=OA=OC=2$，则 $A(-2,0)$，$B(0,2)$，$C(2,0)$．令 $P'(x,y)$，则 $3\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{(x+2)^2+y^2}$，化简得 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}$，可知 $P'$ 在以 $\left(\frac{5}{2},0\right)$ 为圆心，$\frac{3}{2}$ 为半径的圆上．因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=4$，所以当 $P'C$ 最小时，$P'P$ 最小，即三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的体积最小，易知当 $P'$ 的坐标为 $(1,0)$ 时，$P'C$ 取得最小值 1，此时 $P'P=\sqrt{3}$，$P'A=3$，$P'C=1$，得 $PA=2\sqrt{3}$，$PC=2$，因为 $PA^2+PC^2=AC^2$，所以 $\angle APC=90^\circ$，又 $\angle ABC=90^\circ$，所以此时三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的外接球的球心为棱 $AC$ 的中点，外接球的半径 $R=\frac{1}{2}AC=2$，故三棱锥 $P\text{-}ABC$ 外接球的表面积 $S=4\pi R^2=4\pi\times2^2=16\pi$.



图①



图②

## 小题 5 “8＋3＋3”73 分练

1. C 【解析】依题意知 $C=\{3,4,5\}$，集合 $C$ 中有 3 个元素，则其真子集的个数为 $2^3-1=7$．故选 C.

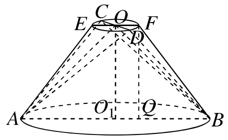
2. A 【解析】复数 $z=m+(m+1)\mathrm{i}(m\in\mathbf{R})$ 在复平面内对应的点为 $(m,m+1)$，依题意可得 $m+1=2m$，解得 $m=1$．故选 A.

3. A 【解析】由题知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)=\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\cos(-2x)=\frac{\mathrm{e}^x-1}{1+\mathrm{e}^x}\cos 2x=-f(x)$，所以 $f(x)=\frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\cos 2x$ 为奇函数，排除 B，C；当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 时，$f(x)<0$，排除 D．故选 A.

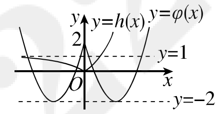
4. A 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q>0)$，由 $a_1=3$，且 $-3a_1$，$a_2$，$a_3$ 成等差数列，得 $2a_2=a_3-3a_1$，即 $2a_1q=a_1q^2-3a_1$，即 $6q=3q^2-9$，可得 $q=3$，所以 $S_n=\frac{3(1-3^n)}{1-3}=\frac{3^{n+1}-3}{2}$．故选 A.

5. A 【解析】因为 $x>3$，且 $xy+2x-3y=12$，所以 $y=\frac{12-2x}{x-3}=-2+\frac{6}{x-3}$，从而 $x+y=x-2+\frac{6}{x-3}=(x-3)+\frac{6}{x-3}+1\geqslant2\sqrt{6}+1$，当且仅当 $x=\sqrt{6}+3$，$y=\sqrt{6}-2$ 时等号成立，所以 $x+y$ 的最小值为 $1+2\sqrt{6}$．故选 A.

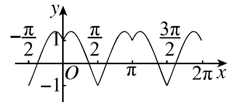
6. B 【解析】如图，取 $CD$ 的中点 $O$，$AB$ 的中点 $O_1$，连接 $OA$，$OB$，$OO_1$，由 $AB$，$CD$ 分别是圆台上、下底面圆的直径，且 $AB\perp CD$，可得 $AC=AD=BC=BD$，则 $OA\perp CD$，$OB\perp CD$，又 $OA\cap OB=O$，所以 $CD\perp$ 平面 $AOB$，所以 $V_{A\text{-}BCD}=V_{C\text{-}AOB}+V_{D\text{-}AOB}=\frac{1}{3}S_{\triangle AOB}\cdot CD$．设 $EF$ 为圆 $O$ 的直径，且 $EF\perp CD$，则 $EF\parallel AB$，四边形 $ABFE$ 为等腰梯形，过 $F$ 作 $FQ\perp AB$ 于 $Q$，因为 $EF=2$，$AB=8$，$BF=5$，所以 $BQ=4-1=3$，得 $FQ=\sqrt{5^2-3^2}=4$，又 $OO_1=FQ=4$，$OO_1\perp AB$，所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times8\times4=16$，所以 $V_{A\text{-}BCD}=\frac{1}{3}\times16\times2=\frac{32}{3}$．故选 B.




7. D 【解析】令 $f(x)=0$，得 $|2^x-1|=a$，令 $g(x)=0$，得 $x^2-4|x|+2=a$，令 $h(x)=|2^x-1|=\begin{cases}2^x-1,x\geqslant0,\\1-2^x,x<0,\end{cases}$ $\varphi(x)=x^2-4|x|+2=\begin{cases}x^2-4x+2,x\geqslant0,\\x^2+4x+2,x<0,\end{cases}$ 则 $f(x)$，$g(x)$ 的零点个数即为 $h(x)$，$\varphi(x)$ 的图象与直线 $y=a$ 的交点个数，作出 $h(x)=|2^x-1|$，$\varphi(x)=x^2-4|x|+2$ 的大致图象，如图所示．由图可知，当 $g(x)$ 有 2 个零点时，$f(x)$ 无零点或只有 1 个零点；当 $g(x)$ 有 3 个零点时，$f(x)$ 只有 1 个零点；当 $f(x)$ 有 2 个零点时，$g(x)$ 有 4 个零点．故选 D.




8. C 【解析】因为函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\pi$，所以 $\omega=2$，所以函数 $f(x)=|\sin 2x|+\cos 2x=\begin{cases}\sin 2x+\cos 2x,x\in\left[k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right],\\-\sin 2x+\cos 2x,x\in\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,\pi+k\pi\right],\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$，即 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right),x\in\left[k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right],\\-\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right),x\in\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,\pi+k\pi\right],\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$，作出函数 $f(x)$ 的图象，如图所示．对于 A，由图可知，$f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right]$ 上不单调，故 A 错误；对于 B，由图可知，$f(x)$ 的图象无对称中心，故 B 错误；对于 C，$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，由 $f(-x)=|\sin(-\omega x)|+\cos(-\omega x)=|\sin\omega x|+\cos\omega x=f(x)$，可知 $f(x)$ 为偶函数，当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 时，$2x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{12}\right]$，所以 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，所以 $\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\in[1,\sqrt{2}]$，所以 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ 上的取值范围为 $[1,\sqrt{2}]$，故 C 正确；对于 D，由图可知，$f(x)$ 图象的对称轴方程为 $x=\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，故 D 错误．故选 C.

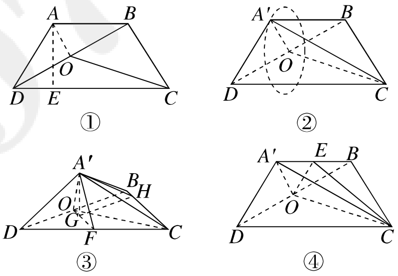



9. AB 【解析】对于 A，所有项的二项式系数之和为 $2^8$，则所有奇数项的二项式系数的和为 $\frac{2^8}{2}=128$，故 A 正确；对于 B，在

所有项的二项式系数中,最大的为$C_8^4$,则二项式系数最大的项为第5项,故B正确;对于C,$\left(\frac{2}{x}-\sqrt[3]{x}\right)^8$的展开式的通项为$T_{k+1}=C_8^k\left(\frac{2}{x}\right)^{8-k}(-\sqrt[3]{x})^k=(-1)^k\cdot 2^{8-k}C_8^k x^{\frac{4}{3}k-8}(0\leqslant k\leqslant 8,k\in\mathbf{N})$,当$\frac{4}{3}k-8\in\mathbf{Z}$时,$k$可能取的值为0,3,6,所以有理项共有三项,故C错误;对于D,令$x=1$,则所有项的系数的和为$\left(\frac{2}{1}-\sqrt[3]{1}\right)^8=1$,故D错误.故选AB.

10. BCD 【解析】由题可知$a=\sqrt{6}$,$b=\sqrt{2}$,$c=\sqrt{a^2-b^2}=2$,所以$F_1(-2,0)$,$F_2(2,0)$,设$A(x_1,y_1)(-\sqrt{6}\leqslant x_1\leqslant\sqrt{6}$且$x_1\neq 0)$,则$B(-x_1,-y_1)$,$P(0,\sqrt{2})$,因为$A(x_1,y_1)$在椭圆上,所以$y_1^2=2\left(1-\frac{x_1^2}{6}\right)$.对于A,$|AB|=2|AO|=2\sqrt{x_1^2+y_1^2}=2\sqrt{x_1^2+2\left(1-\frac{x_1^2}{6}\right)}=2\sqrt{2+\frac{2x_1^2}{3}}>2\sqrt{2}$,故A错误;对于B,连接$BF_2$,可知四边形$AF_1BF_2$是平行四边形,则$|AF_1|+|BF_1|=|AF_1|+|AF_2|=2\sqrt{6}$,故B正确;对于C,因为$c>b$,所以以$F_1F_2$为直径的圆与椭圆有4个交点,则存在点$A$,使得$AF_1\perp AF_2$,故C正确;对于D,$k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{y_1-\sqrt{2}}{x_1}\cdot\frac{-y_1-\sqrt{2}}{-x_1}=\frac{y_1^2-2}{x_1^2}=\frac{2\left(1-\frac{x_1^2}{6}\right)-2}{x_1^2}=-\frac{1}{3}$,故D正确.故选BCD.

11. AC 【解析】在梯形$ABCD$中,连接$AO$,过$A$作$AE\perp DC$于$E$,如图①,由题知$AB=BC=AD=2$,$CD=4$,则$DE=1$,$\cos\angle ADE=\frac{1}{2}$,故$\angle ADE=\frac{\pi}{3}$,得$\angle DAB=\frac{2\pi}{3}$,所以$\angle ADB=\angle ABD=\frac{\pi}{6}$,则$OA\perp BD$.又$\angle BCD=\frac{\pi}{3}$,$\angle BDC=\frac{\pi}{6}$,所以$BC\perp BD$,得$OA=2\sin\frac{\pi}{6}=1$,$OB=2\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$,$OC=\sqrt{BC^2+OB^2}=\sqrt{7}$.沿$BD$将$\triangle ABD$翻折,则点$A$的轨迹为圆,且圆面一直和$BD$垂直,如图②,当$A'O\perp OC$时,$A'C=2\sqrt{2}$,又$A'O\perp BD$,$OC\cap BD=O$,$OC,BD\subset$平面$BCD$,所以$A'O\perp$平面$BCD$,因为$A'O\subset$平面$A'BD$,所以平面$A'BD\perp$平面$BCD$,又$BC\subset$平面$BCD$,平面$BCD\cap$平面$A'BD=BD$,$BC\perp BD$,所以$BC\perp$平面$A'BD$,又$A'D\subset$平面$A'BD$,所以$A'D\perp BC$,故A正确.如图③,在平面$BCD$内,过点$O$作$OF\perp BD$,交$CD$于$F$,连接$A'F$,因为$A'O\perp BD$,$A'O\cap OF=O$,所以$BD\perp$平面$A'OF$,又$BD\subset$平面$BCD$,所以平面$A'OF\perp$平面$BCD$,又平面$A'OF\cap$平面$BCD=OF$,所以点$A'$在平面$BCD$内的射影$G$在直线$OF$上,过点$G$作$BD$的平行线交直线$BC$于$H$,连接$A'H$,$A'G$,因为$A'G\perp$平面$BCD$,$GH\perp BC$,所以$\angle A'HG$即为二面角$A'$-$BC$-$D$的平面角,$\tan\angle A'HG=\frac{A'G}{GH}$.易知四边形$OGHB$为矩形,所以$GH=OB=\sqrt{3}$,因为$A'G\leqslant A'O=1$,所以$\tan\angle A'HG=\frac{A'G}{GH}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以$\angle A'HG$有最大值,且最大值为$\frac{\pi}{6}$,故B,D均错误.因为$S_{\triangle BCD}$不变,所以当三棱锥$A'$-$BCD$的高最大时,其体积最大,易知当$A'O\perp$平面$BCD$时,三棱锥$A'$-$BCD$的高最大,为$A'O$.如图④,取$A'B$的中点$E$,连接$OE$,$CE$,则$OE\parallel A'D$,故$\angle COE$(或其补角)即为异面直线$A'D$与$CO$所成的角,当$A'O\perp$平面$BCD$时,由对A选项的分析知$BC\perp$平面$A'BD$,又$A'B\subset$平面$A'BD$,所以$A'B\perp BC$,在$\triangle OCE$中,$OE=\frac{1}{2}A'B=1$,$OC=\sqrt{7}$,$CE=\sqrt{BC^2+BE^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$,所以$\cos\angle COE=\frac{OC^2+OE^2-CE^2}{2OC\cdot OE}=\frac{7+1-5}{2\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{14}>\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$,所以$\angle COE<\frac{\pi}{3}$,故C正确.故选AC.



① ② ③ ④

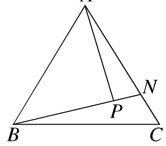
12. 23 【解析】样本数据按从小到大排列为14,16,18,20,21,22,24,28,一共有8个数据,$8\times 0.75=6$,所以样本数据的75%分位数为$\frac{1}{2}\times(22+24)=23$.

13. $\frac{3\pi}{4}$ 【解析】设$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\theta$,且$\theta\in[0,\pi]$,$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$,则$\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{a}$上的投影向量为$|\boldsymbol{b}|\cos\theta\cdot\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\cos\theta\cdot\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\cdot\boldsymbol{a}=\cos\theta\cdot\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\cdot(1,1)=(-2,-2)=-2(1,1)$,即$\cos\theta\cdot\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}=-2$,所以$\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以$\theta=\frac{3\pi}{4}$.

14. (1,4) 【解析】设点$P(x_0,y_0)$,则点$P$到$l_1$的距离$d=\frac{|2x_0-y_0|}{\sqrt{5}}$,直线$PD$的方程为$y=-2x+2x_0+y_0$,由$\begin{cases}y=-2x+2x_0+y_0,\\ y=2x,\end{cases}$解得$x_D=\frac{2x_0+y_0}{4}$,所以$|OD|=\sqrt{5}\frac{|2x_0+y_0|}{4}$,所以$S_{\text{平行四边形}ODPE}=|OD|d=\sqrt{5}\frac{|2x_0+y_0|}{4}\times\frac{|2x_0-y_0|}{\sqrt{5}}=1$,所以$x_0^2-\frac{y_0^2}{4}=\pm 1$,所以点$P$的轨迹$\Gamma$为两个双曲线$x^2-\frac{y^2}{4}=1$,$\frac{y^2}{4}-x^2=1$.因为双曲线$x^2-\frac{y^2}{4}=1$的实半轴长为1,双曲线$\frac{y^2}{4}-x^2=1$的实半轴长为2,若$\Gamma$与圆$x^2+y^2=t(t>0)$有四个交点,则$1<\sqrt{t}<2$,即$1<t<4$,所以实数$t$的取值范围是(1,4).

## 小题6 "8+3+3"73分练

1. C 【解析】由题意得$A=\{0,1,2,3,4\}$,又$B=\{x|x=3k-1,k\in\mathbf{Z}\}$,$\therefore A\cap B=\{2\}$.故选C.
2. D 【解析】因为复数$z=(2+3i)(3+2i)=6+4i+9i-6=13i$,所以$z$的实部为0,虚部为13,故A,B均错误;$\bar{z}=-13i$,$|\bar{z}|=13$,故C错误,D正确.故选D.
3. B 【解析】$9x^2+4y^2=36$化为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$,椭圆的焦点在$y$轴上,设所求椭圆的方程为$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1(a>b>0)$,依题意有$\begin{cases}b=2\sqrt{5},\\ a^2-b^2=5,\end{cases}$所以$a^2=25$,$b^2=20$,所求的椭圆方程为$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{25}=1$.故选B.
4. D 【解析】如图,因为$\overrightarrow{BP}=4\overrightarrow{PN}$,所以$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{AN}$,又$\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{NC}$,所以$\overrightarrow{AN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$,所以$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{5}\overrightarrow{CA}$.故选D.

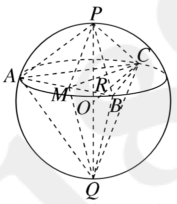


5. D 【解析】设数列$\{a_n\}$的公比为$q$,由题得$a_1\neq 0$,$q\neq 0$,因为$a_{2n}=a_n^2$,所以$a_1\cdot q^{2n-1}=(a_1q^{n-1})^2$,即$a_1\cdot q^{2n-1}=a_1^2q^{2n-2}$,化简得$a_1=q$.因为$-a_2$是$a_1$与$a_3$的等差中项,所以$-2a_2=a_1+a_3$,即$-2a_1q=a_1+a_1q^2$,化简得$q^2+2q+1=0$,解得$q=-1$,则$a_1=-1$,所以$a_5=a_1\cdot q^4=-1\times 1=-1$,故选D.

6. A 【解析】由 $5\cos 2\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$，得 $5(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)$，即 $5(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)=\cos\alpha-\sin\alpha$，因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\cos\alpha-\sin\alpha<0$，所以 $\cos\alpha+\sin\alpha=\frac{1}{5}$，结合 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$，且 $\cos\alpha<0,\sin\alpha>0$，得 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{4}{3}$. 故选 A.

7. D 【解析】对于 A，当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$a=\frac{\pi}{6}+\frac{6}{\pi}>\frac{3}{6}+\frac{6}{4}=2$，$c=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$，此时 $a>c$，故 A 中命题为真命题；对于 B，当 $x=0$ 时，$b=2$，$c=\sqrt{3}$，此时 $b>c$，故 B 中命题为真命题；对于 C，当 $x=-\frac{\pi}{6}$ 时，$a=-\frac{\pi}{6}-\frac{6}{\pi}<0$，$c=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1$，此时 $a<c$，故 C 中命题为真命题；对于 D，当 $x\in[-1,1]$ 时，$b=e^x+e^{-x}\geqslant 2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}=2$，当且仅当 $e^x=e^{-x}$，即 $x=0$ 时取等号，由 $x\in[-1,1]$，得 $x+\frac{\pi}{3}\in\left[-1+\frac{\pi}{3},1+\frac{\pi}{3}\right]$，而 $\frac{\pi}{2}<1+\frac{\pi}{3}<\pi$，$0<-1+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$，所以 $c=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 2$，当且仅当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时取等号，而 $0\neq\frac{\pi}{6}$，所以 $\forall x\in[-1,1]$，$b>c$，故 D 中命题为假命题. 故选 D.

8. D 【解析】连接 $PQ$，由题意可得 $PQ\perp$ 平面 $ABC$，且球心 $O$ 是 $PQ$ 的中点，设 $PQ$ 与平面 $ABC$ 的交点为 $R$，则




$R$ 为 $\triangle ABC$ 的中心，连接 $CR$ 并延长交 $AB$ 于 $M$，得 $CM\perp AB$，$M$ 为 $AB$ 的中点，连接 $PM,QM$，由题意可得 $PM\perp AB$，$MQ\perp AB$，所以 $\angle PMC,\angle QMC$ 分别为两个正三棱锥的侧面与底面 $ABC$ 所成的角，即 $\angle PMC=\alpha$，$\angle QMC=\beta$，所以 $\tan\alpha=\frac{PR}{MR}$，$\tan\beta=\frac{QR}{MR}$. 设球 $O$ 的半径为 $r$，球心 $O$ 到平面 $ABC$ 的距离为 $m$ $(m\geqslant 0)$，不妨令 $PR\leqslant QR$，则 $PR=r-m$，$QR=r+m$，设 $\triangle ABC$ 的边长为 $a$ $(a>0)$，则 $CR=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，由正三角形的性质得 $MR=\frac{1}{2}RC=\frac{\sqrt{3}}{6}a$，所以 $\tan\alpha=\frac{r-m}{\frac{\sqrt{3}}{6}a}$，$\tan\beta=\frac{r+m}{\frac{\sqrt{3}}{6}a}$，连接 $OC$，则 $r^2=m^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2=m^2+\frac{1}{3}a^2$，所以 $r\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}a$，所以 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{r-m}{\frac{\sqrt{3}}{6}a}+\frac{r+m}{\frac{\sqrt{3}}{6}a}}{1-\frac{r-m}{\frac{\sqrt{3}}{6}a}\times\frac{r+m}{\frac{\sqrt{3}}{6}a}}=$

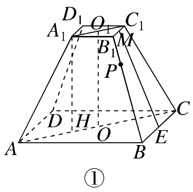
$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}a\times 2r}{\frac{\sqrt{3}}{6}a\times\frac{\sqrt{3}}{6}a-(r^2-m^2)}=$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}a\times 2r}{\frac{1}{12}a^2-\left(r^2-r^2+\frac{1}{3}a^2\right)}=$$

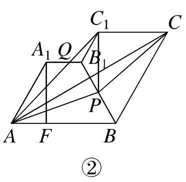
$-\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}a\times 2r}{\frac{1}{4}a^2}<0$，所以 $\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$，故当 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}a$ 时，$\alpha+\beta$ 最大，此时 $\tan(\alpha+\beta)=-\frac{4}{3}$. 故选 D.

9. BD 【解析】将 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度得到 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\pi+x-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，所以 A 错误；将 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度得到 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=g(x)$ 的图象，所以 B 正确；与 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{5\pi}{12}$ 对称的图象对应的函数为 $y=f\left(2\times\frac{5\pi}{12}-x\right)=\sin\left(2\times\frac{5\pi}{12}-x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin(\pi-x)=\sin x$，所以 C 错误；与 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{7\pi}{12}$ 对称的图象对应的函数为 $y=f\left(2\times\frac{7\pi}{12}-x\right)=\sin\left(2\times\frac{7\pi}{12}-x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi-x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=g(x)$，所以 D 正确. 故选 BD.

10. ABD 【解析】对于 A，B，如图①，由题可知，四边形 $ABCD$ 和四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 均为正方形，所以 $S_{正方形ABCD}=36$，$S_{正方形A_1B_1C_1D_1}=4$，分别取 $BC,B_1C_1$ 的中点 $E,M$，连接 $ME$，则 $ME$ 为棱台的斜高，因为侧面 $BCC_1B_1$ 为等腰梯形，所以 $ME=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，所以侧面 $BCC_1B_1$ 的面积为 $(2+6)\times 2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=8\sqrt{3}$，故正四棱台的表面积为 $36+4+8\sqrt{3}\times 4=40+32\sqrt{3}$，故 A 正确；连接 $AC,A_1C_1$，分别取 $AC,A_1C_1$ 的中点 $O,O_1$，连接 $OO_1$，过点 $A_1$ 作 $A_1H\perp AC$ 于 $H$，则正四棱台的高为 $OO_1$，$A_1O_1=\sqrt{2}$，$AO=3\sqrt{2}$，则 $AH=2\sqrt{2}$，在梯形 $A_1O_1OA$ 中，$OO_1=A_1H=\sqrt{16-8}=2\sqrt{2}$，所以正四棱台 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的体积 $V=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times(4+36+\sqrt{4\times 36})=\frac{104\sqrt{2}}{3}$，故 B 正确. 对于 C，D，如图②，将侧面 $ABB_1A_1$ 和侧面 $BCC_1B_1$ 展开且处于同一平面，连接 $AC_1$，与 $A_1B_1$ 交于点 $Q$，在等腰梯形 $ABB_1A_1$ 中，过 $A_1$ 作 $A_1F\perp AB$ 于 $F$，则 $AF=2$，又 $AA_1=4$，所以 $\angle A_1AF=\frac{\pi}{3}$，得 $\angle ABC=\angle ABB_1+\angle B_1BC=\frac{2\pi}{3}$，从而得 $AA_1\parallel BC$，又 $B_1C_1\parallel BC$，所以 $AA_1\parallel B_1C_1$，则 $\triangle AA_1Q\backsim\triangle C_1B_1Q$，所以 $\frac{AQ}{C_1Q}=\frac{A_1Q}{B_1Q}=\frac{AA_1}{C_1B_1}=2$，得 $A_1Q=\frac{2}{3}A_1B_1=\frac{4}{3}$，$\angle AA_1B_1=\pi-\angle A_1AB=\frac{2\pi}{3}$，在 $\triangle A_1AQ$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle AA_1B_1=\frac{4^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2-AQ^2}{2\times 4\times\frac{4}{3}}=-\frac{1}{2}$，可得 $AQ=\frac{4\sqrt{13}}{3}$，则 $C_1Q=\frac{1}{2}AQ=\frac{2\sqrt{13}}{3}$，所以 $AC_1=AQ+QC_1=2\sqrt{13}$，因为 $P$ 为棱 $BB_1$ 上的动点（含端点），所以 $A,P,C_1$ 三点不能共线，所以 $AP+PC_1>AC_1=2\sqrt{13}$，C 错误；连接 $AC$，当 $A,P,C$ 三点共线时，$AP+PC$ 最小，由余弦定理得，$\cos\angle ABC=\frac{36+36-AC^2}{2\times 6\times 6}=-\frac{1}{2}$，可得 $AC=6\sqrt{3}$，所以 $AP+PC$ 的最小值为 $6\sqrt{3}$，故 D 正确. 故选 ABD.




①



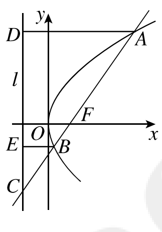

②

11. ABD 【解析】因为 $f(x)-f(-x)=2x$，所以 $f'(x)+f'(-x)=2$，即 $g(x)+g(-x)=2$，令 $x=0$，得 $g(0)=1$，故 A 正确；对于 $f(x)-f(-x)=$

$2x$，当 $x\neq 0$ 时，$\dfrac{f(x)}{x}+\dfrac{f(-x)}{-x}=2$，所以 $y=\dfrac{f(x)}{x}$ 的图象关于点 $(0,1)$ 对称，故 B 正确；对于 C，假设 $f(x)+f(2-x)=0$，求导得 $f'(x)-f'(2-x)=0$，即 $g(x)-g(2-x)=0$，又 $g(x)+g(2-x)=0$，所以 $g(x)=0$，所以 $g(0)=0$，与 $g(0)=1$ 矛盾，假设不成立，故 C 错误；对于 D，因为 $g(x)+g(-x)=2$，$g(x)+g(2-x)=0$，所以 $g(2-x)-g(-x)=-2$，又 $g(0)=1$，所以 $g(1)=0$，$g(2)=-1$，所以 $g(n+2)-g(n)=-2$，所以数列 $\{g(n)\}(n\in\mathbf{N}^*)$ 的奇数项是以 0 为首项，$-2$ 为公差的等差数列，数列 $\{g(n)\}(n\in\mathbf{N}^*)$ 的偶数项是以 $-1$ 为首项，$-2$ 为公差的等差数列，又 $g(2)-g(1)=-1$，所以数列 $\{g(n)\}(n\in\mathbf{N}^*)$ 是以 0 为首项，$-1$ 为公差的等差数列，所以 $g(n)=1-n$，所以 $\sum\limits_{k=1}^{n}g(k)=\dfrac{n-n^2}{2}$，故 D 正确. 故选 ABD.

12. 0.271 8 【解析】技术改造前，易知 $\mu_1=50$，$\sigma_1=0.4$，则其优品率为 $P(49.6<X<50.4)=P(\mu_1-\sigma_1<X<\mu_1+\sigma_1)=P(|X-\mu_1|<\sigma_1)\approx 0.682\ 7$. 技术改造后，易知 $\mu_2=50$，$\sigma_2=0.2$，则其优品率为 $P(49.6<X<50.4)=P(\mu_2-2\sigma_2<X<\mu_2+2\sigma_2)=P(|X-\mu_2|<2\sigma_2)\approx 0.954\ 5$. 所以所求的优品率之差约为 $0.954\ 5-0.682\ 7=0.271\ 8$.

13. 2 【解析】由题可知 $A,B,C,F$ 四点共线，且 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，如图，过 $A$ 作 $AD\perp l$ 于 $D$，过 $B$ 作 $BE\perp l$ 于 $E$，则 $|AD|=|AF|$，$|BE|=|BF|$，所以 $|AD|=3|BE|$，又 $\text{Rt}\triangle ACD\backsim\text{Rt}\triangle BCE$，所以 $\dfrac{|BC|}{|AC|}=\dfrac{|BE|}{|AD|}=\dfrac{1}{3}$，所以 $\dfrac{|AB|+|BC|}{|BC|}=3$，得 $\dfrac{|AB|}{|BC|}=2$，即 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BC}$，故 $\mu=2$.




14. $5\times 3^{n-1}$　$5\times 3^{2n-1}+1$ 【解析】因为 $C_1$ 共 5 项，按规则 $f$ 对数列 $C_1$ 进行变换，$C_1$ 中的每一项都变为 3 项，以此类推，得 $C_1,C_2,C_3,\cdots,C_n$ 的项数构成首项为 5，公比为 3 的等比数列，所以 $C_n$ 的项数为 $5\times 3^{n-1}$. 根据变换规则，若数列 $C_n$ 中，2 与 0 的个数相同，则数列 $C_{n+1}$ 中，2 与 0 的个数也相同；若数列 $C_n$ 中，2 比 0 多 $n$ 个，则数列 $C_{n+1}$ 中，2 比 0 少 $n$ 个；若数列 $C_n$ 中，2 比 0 少 $n$ 个，则数列 $C_{n+1}$ 中，2 比 0 多 $n$ 个. 因为数列 $C_1$ 中有 5 项，其中 2 个 2，3 个 0，2 比 0 少 1 个，所以数列 $C_2$ 的 15 项中，2 比 0 多 1 个. 以此类推，若 $n$ 为奇数，则数列 $C_n$ 中，2 比 0 少 1 个；若 $n$ 为偶数，则数列 $C_n$ 中，2 比 0 多 1 个. 所以数列 $C_{2n}$ 中，2 比 0 多 1 个，所以 $S_{2n}=\dfrac{5\times 3^{2n-1}+1}{2}\times 2=5\times 3^{2n-1}+1$.

## 小题 7 “8+3+3”73 分练

1. A 【解析】$z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(1-\mathrm{i})^2}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=-\mathrm{i}$，则 $|z|=\sqrt{(-1)^2}=1$. 故选 A.

2. D 【解析】由题意可得 $A=\{x\,|\,3x^2-8x+4<0\}=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{2}{3}<x<2\right\}$，$B=\{x\,|\,\lg x\leqslant 0\}=\{x\,|\,0<x\leqslant 1\}$，所以 $A\cup B=(0,2)$. 故选 D.

3. B 【解析】对于 A，若 $\alpha/\!/\beta$，$l/\!/\alpha$，$m/\!/\beta$，则 $l$ 与 $m$ 可能平行，也可能相交，还可能异面，故 A 错误；对于 B，若 $l/\!/m$，$m\perp\beta$，则 $l\perp\beta$，又 $\alpha/\!/\beta$，所以 $l\perp\alpha$，故 B 正确；对于 C，D，若 $\alpha\perp\beta$，$l/\!/\alpha$，$m/\!/\beta$，则 $l$ 与 $m$ 可能平行，也可能相交，还可能异面，故 C，D 错误. 故选 B.

4. B 【解析】先从 3 个不同的公益广告中选 2 个安排到第一个和最后一个播放，有 $A_3^2$ 种方法，然后将 3 个不同的商业广告排成一排，有 $A_3^3$ 种方法，3 个不同的商业广告之间有两个空，选择一个将剩下的 1 个公益广告安排进去即可，所以共有 $A_3^2A_3^3A_2^1=72$（种）不同的播放方式. 故选 B.

5. B 【解析】设火星的公转周期为 $T_1$，椭圆轨道的长半轴长为 $a_1$，水星的公转周期为 $T_2$，椭圆轨道的长半轴长为 $a_2$，则 $T_1\approx 8T_2$，且 $\begin{cases}T_1=\dfrac{2\pi}{\sqrt{GM}}a_1^{\frac{3}{2}},\\ T_2=\dfrac{2\pi}{\sqrt{GM}}a_2^{\frac{3}{2}},\end{cases}$ 所以 $\dfrac{T_1}{T_2}=\left(\dfrac{a_1}{a_2}\right)^{\frac{3}{2}}\approx 8$，所以 $\dfrac{a_1}{a_2}\approx 4$，即 $a_1\approx 4a_2$. 故选 B.

6. C 【解析】$f(x)=2\cos^2\omega x+\sqrt{3}\sin 2\omega x-1=\cos 2\omega x+\sqrt{3}\sin 2\omega x=2\sin\left(2\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)(\omega<0)$，∵函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\pi$，∴ $\dfrac{2\pi}{-2\omega}=\pi$，得 $\omega=-1$，∴ $f(x)=2\sin\left(-2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=-2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$. 对于 A，当 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 时，$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-2\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}\right)=-2\neq 0$，∴ $f(x)$ 的图象不关于点 $\left(\dfrac{\pi}{3},0\right)$ 对称，故 A 错误；对于 B，令 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant 2x-\dfrac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得 $k\pi-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\dfrac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，∴函数 $f(x)$ 在 $\left[1,\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减，在 $\left[\dfrac{\pi}{3},2\right]$ 上单调递增，故 B 错误；对于 C，由 B 选项知函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$ 上单调递减，故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，故 C 正确；对于 D，令 $2x-\dfrac{\pi}{6}=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得 $x=\dfrac{1}{2}k\pi+\dfrac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，∴ $f(x)$ 图象的对称轴方程为 $x=\dfrac{1}{2}k\pi+\dfrac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，易知直线 $x=\dfrac{5\pi}{12}$ 不是函数 $f(x)$ 图象的对称轴，故 D 错误. 故选 C.

7. C 【解析】因为 $f(x)=\sin\pi x+\mathrm{e}^{3x-3}-\mathrm{e}^{3-3x}-x+3$，所以 $f(x+1)=\sin(\pi x+\pi)+\mathrm{e}^{3x+3-3}-\mathrm{e}^{3-3x-3}-x-1+3=-\sin\pi x+\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{-3x}-x+2$. 设 $g(x)=f(x+1)-2=-\sin\pi x+\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{-3x}-x$，显然 $g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，则 $g(x-1)=f(x)-2$，因为 $g(-x)=-\sin(-\pi x)+\mathrm{e}^{-3x}-\mathrm{e}^{3x}+x=-(-\sin\pi x+\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{-3x}-x)=-g(x)$，所以 $g(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，又 $g'(x)=-\pi\cos\pi x+3\mathrm{e}^{3x}+3\mathrm{e}^{-3x}-1\geqslant-\pi\cos\pi x+2\sqrt{3\mathrm{e}^{3x}\cdot 3\mathrm{e}^{-3x}}-1=5-\pi\cos\pi x>0$（当且仅当 $x=0$ 时取等号），所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 因为 $f(x)+f(3-2x)<4$，所以 $[f(x)-2]+[f(3-2x)-2]<0$，所以 $g(x-1)+g(2-2x)<0$，即 $g(x-1)<-g(2-2x)=g(2x-2)$，所以 $x-1<2x-2$，解得 $x>1$，则满足 $f(x)+f(3-2x)<4$ 的 $x$ 的取值范围是 $(1,+\infty)$. 故选 C.

8. B 【解析】连接 $F_2M$，由点 $F_2$ 关于 $l$ 的对称点 $M$ 在线段 $F_1P$ 的延长线上，且 $\angle F_1PF_2=60^\circ$，得 $\angle F_2PM=120^\circ$，则 $\angle PF_2M=30^\circ$. 设直线 $l$ 与 $x$ 轴的交点为 $H$，因为 $l$ 的倾斜角为 $135^\circ$，所以 $\angle HF_2M=45^\circ$，故在 $\triangle PF_1F_2$ 中，有 $\angle F_1PF_2=60^\circ$，$\angle PF_2F_1=105^\circ$，$\angle PF_1F_2=15^\circ$，由正弦定理得 $\dfrac{|PF_1|}{\sin\angle PF_2F_1}=\dfrac{|PF_2|}{\sin\angle PF_1F_2}=\dfrac{|F_1F_2|}{\sin\angle F_1PF_2}$，所以 $\dfrac{|PF_1|+|PF_2|}{\sin 15^\circ+\sin 105^\circ}=\dfrac{|F_1F_2|}{\sin 60^\circ}$，即 $\dfrac{2a}{\sin 15^\circ+\sin 105^\circ}=\dfrac{2c}{\sin 60^\circ}$，又 $\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\sin 105^\circ=\sin(60^\circ+45^\circ)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，所以离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sin 60^\circ}{\sin 15^\circ+\sin 105^\circ}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 B.

9. BCD 【解析】对于 A，将数据从小到大排列为 1，1，2，2，3，4，4，5，共有 8 个数据，因为 $8\times 45\%=3.6$，所以数据的第 45 百分位数为第 4 个数据，即为 2，所以 A 不

正确.对于B,若数据 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$ 的标准差为 $s$,则数据 $2x_1,2x_2,2x_3,\cdots,2x_n$ 的标准差为 $\sqrt{2^2s^2}=2s$,所以B正确.对于C,随机变量 $X$ 服从正态分布 $N(1,2)$,若 $P(X>0)=\frac{3}{4}$,则根据正态曲线的对称性,可得 $P(0<X<2)=2P(X>0)-1=\frac{1}{2}$,所以C正确.对于D,随机变量 $Y$ 服从二项分布 $B(4,p)$,若方差 $D(Y)=\frac{3}{4}$,则 $4p(1-p)=\frac{3}{4}$,解得 $p=\frac{1}{4}$ 或 $p=\frac{3}{4}$.当 $p=\frac{1}{4}$ 时,可得 $P(Y=2)=C_4^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{27}{128}$;当 $p=\frac{3}{4}$ 时,可得 $P(Y=2)=C_4^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(1-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{128}$.综上可得,$P(Y=2)=\frac{27}{128}$,所以D正确.故选BCD.

10. ACD 【解析】对于A选项,连接 $SO$,$OA$,则 $SO$ 与底面垂直,所以 $SA$ 与圆锥底面所成的角为 $\angle SAO=30°$.因为 $SA\perp SB$,所以 $\triangle SAB$ 的面积为 $\frac{1}{2}SA\cdot SB=\frac{1}{2}\times SA^2=2$,可得 $SA=2$,所以该圆锥的高为 $SO=SA\cdot\sin 30°=2\times\frac{1}{2}=1$,故A正确.对于B选项,该圆锥的底面半径为 $OA=SA\cdot\cos 30°=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$,故该圆锥的体积 $V=\frac{1}{3}\pi\times OA^2\times SO=\frac{1}{3}\pi\times(\sqrt{3})^2\times 1=\pi$,故B错误.对于C选项,设该圆锥侧面展开图的圆心角为 $\theta$,因为底面圆的周长为 $2\pi\times OA=2\sqrt{3}\pi$,所以 $\theta=\frac{2\sqrt{3}\pi}{SA}=\frac{2\sqrt{3}\pi}{2}=\sqrt{3}\pi$,故C正确.对于D选项,取 $AB$ 的中点 $E$,连接 $OE$,$SE$,因为 $SA=SB$,$E$ 为 $AB$ 的中点,所以 $SE\perp AB$,同理 $OE\perp AB$,所以二面角 $S$-$AB$-$O$ 的平面角为 $\angle SEO$.因为 $SO\perp$ 平面 $OAE$,$OE\subset$ 平面 $OAE$,所以 $SO\perp OE$.因为 $SA\perp SB$,$SA=SB$,所以 $\triangle SAB$ 为等腰直角三角形,则 $AB=\sqrt{SA^2+SB^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$,所以 $SE=\frac{1}{2}AB=\sqrt{2}$,所以 $\sin\angle SEO=\frac{SO}{SE}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,可得 $\angle SEO=45°$,所以二面角 $S$-$AB$-$O$ 的大小为 $45°$,故D正确.故选ACD.

11. ABD 【解析】由 $f(x)=ax^3+x^2+cx+\frac{1}{27}(a\neq 0)$,得 $f'(x)=3ax^2+2x+c(a\neq 0)$,$f(x)$ 图象的对称中心为 $\left(-\frac{1}{3a},f\left(-\frac{1}{3a}\right)\right)$.对于A,因为 $f(x)$ 有三个不同的零点,所以 $f(x)$ 有两个极值点,所以 $f'(x)=0$ 有两个不同的根,所以 $\Delta=4-12ac>0$,得 $3ac<1$,故A正确.对于B,由 $x_1,x_2,x_3$ 成等差数列及三次函数图象的对称性可知 $x_2=-\frac{1}{3a}$,所以 $f(x_2)=f\left(-\frac{1}{3a}\right)=\frac{2+a^2-9ac}{27a^2}=0$,又 $ac<\frac{1}{3}$,所以 $2+a^2=9ac<3$,所以 $a^2<1$,所以 $a\in(-1,0)\cup(0,1)$,故B正确.对于C,令 $g(x)=0$,得 $ax^3+x^2+cx-\frac{26}{27}=0(a\neq 0)$,若 $g(x)$ 恰有两个不同的零点 $m,n$,则 $m$ 或 $n$ 必为 $g(x)$ 的极值点.若 $m$ 为 $g(x)$ 的极值点,则方程 $ax^3+x^2+cx-\frac{26}{27}=0(a\neq 0)$ 的三个根为 $m,m,n$,可得 $2m+n=-\frac{1}{a}$;若 $n$ 为 $g(x)$ 的极值点,同理可得 $m+2n=-\frac{1}{a}$,故C错误.对于D,若 $g(x)$ 有三个不同的零点 $t_1,t_2,t_3$,则由根与系数的关系得

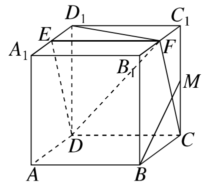
$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=t_1+t_2+t_3=-\frac{1}{a},\\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1=\frac{c}{a},\end{cases}$$

所以 $(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=(t_1+t_2+t_3)^2-2(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1)$,可得 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=t_1^2+t_2^2+t_3^2$,故D正确.故选ABD.

12. $-3$ 【解析】由题知 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,4)+(4,-2)=(6,2)$,则 $\boldsymbol{c}\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(1,\lambda)\cdot(6,2)=6+2\lambda=0$,解得 $\lambda=-3$.

13. 3 【解析】当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=1-3=-2$,当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-3n-[(n-1)^2-3(n-1)]=2n-4$,显然 $a_1=-2$ 也满足上式,故 $a_n=2n-4,n\in\mathbf{N}^*$,则 $b_n=a_n\cdot(\sqrt{3})^{-a_n}=(2n-4)\cdot(\sqrt{3})^{-2n+4}=(2n-4)\cdot 3^{-n+2}=\frac{2n-4}{3^{n-2}}$.因为 $\frac{b_k}{2}$ 是 $b_{k+1},b_{k+2}$ 的等差中项,所以 $b_k=b_{k+1}+b_{k+2}$,即 $\frac{2k-4}{3^{k-2}}=\frac{2k-2}{3^{k-1}}+\frac{2k}{3^k}$,则 $2k-4=\frac{2k-2}{3}+\frac{2k}{9}$,解得 $k=3$.

14. $\frac{2\sqrt{5}\pi}{5}$ 【解析】如图,分别取 $A_1D_1$,$B_1C_1$ 的中点 $E,F$,连接 $DE,EF,CF$.由题易知 $BM\perp CF$,$BM\perp CD$,$\because CF\cap CD=C$,$\therefore BM\perp$ 平面 $CDEF$,又 $DP\perp BM$,$\therefore$ 点 $P$ 在平面 $CDEF$ 内.由 $D_1P=1$,得点 $P$ 在以 $D_1$ 为球心,1为半径的球面上,$\therefore$ 动点 $P$ 的轨迹为平面 $CDEF$ 与球 $D_1$ 的球面的交线.连接 $DF$,$D_1F$,设点 $D_1$ 到平面 $DEF$ 的距离为 $h$,平面 $DEF$ 截球 $D_1$ 所得截面圆的半径为 $r$,则由 $V_{三棱锥D_1\text{-}DEF}=V_{三棱锥F\text{-}DED_1}$,得 $\frac{1}{3}h\cdot S_{\triangle DEF}=\frac{1}{3}\times 2\times\frac{1}{2}\times 2\times 1$,$\because S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{5}=\sqrt{5}$,$\therefore h=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,则 $r=\sqrt{1^2-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,$\therefore$ 动点 $P$ 的轨迹长度为 $\frac{2\sqrt{5}\pi}{5}$.




## 小题8 "8+3+3"73分练

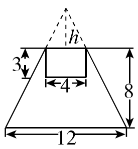
1. A 【解析】由 $x^2+2x-3<0$,得 $-3<x<1$,故 $A=(-3,1)$.由 $B=[0,2]$,得 $\complement_U B=(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$,所以图中阴影部分表示的集合为 $A\cap(\complement_U B)=(-3,0)$.故选A.

2. D 【解析】由题知 $z=\frac{5}{3+4i}=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$,则 $z$ 在复平面内对应的点为 $\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$,位于第四象限.故选D.

3. B 【解析】由 $X\sim N(3,2^2)$ 可知 $E(X)=3$,$D(X)=4$,又因为 $Y=\frac{1}{2}(X-3)$,所以 $E(Y)=E\left(\frac{1}{2}X-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}E(X)-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=0$,$D(Y)=D\left(\frac{1}{2}X-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}D(X)=1$,则 $\frac{E(Y)+1}{D(Y)+1}=\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}$.故选B.

4. C 【解析】$f(x)=\sin\omega x+\sqrt{3}\cos\omega x=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$,因为 $x\in(0,\pi)$,所以 $\omega x+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\pi\omega+\frac{\pi}{3}\right)$,因为 $x_1,x_2$ 是 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上的两个极值点,不妨设 $x_1<x_2$,所以 $\begin{cases}\omega x_1+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2},\\ \omega x_2+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2},\end{cases}$ 所以 $\omega(x_1+x_2)=\frac{4\pi}{3}$,所以 $f(x_1+x_2)=2\sin\left[\omega(x_1+x_2)+\frac{\pi}{3}\right]=2\sin\frac{5\pi}{3}=-\sqrt{3}$.故选C.

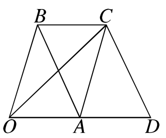
5. C 【解析】作出圆台的轴截面,如图,设截面的上底与腰的延长线构成的等腰三角形底边上的高为 $h$ cm,由相似三角形的性质,得 $\frac{h}{h+8}=\frac{2}{6}$,解得 $h=4$.设水到达最大容积时水面的半径为 $r$ cm,则 $\frac{4+3+1}{4+8}=\frac{r}{6}$,解得 $r=4$,所以水的最大容积 $V=\frac{1}{3}\pi(8-3-1)\times(4^2+4\times 6+$



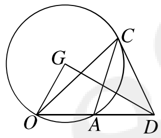
$6^2)=\frac{304\pi}{3}(\text{cm}^3)$. 故选 C.

**6.** B **[解析]** 由 $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}$ 得 $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$，函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1,-1)$ 处的切线的斜率 $k=f'(1)=2$，切线方程为 $y+1=2(x-1)$，即 $y=2x-3$，由题知切线 $y=2x-3$ 与曲线 $y=ax^2+(a-1)x-2$ 只有一个公共点. 当 $a=0$ 时，由 $\begin{cases}y=2x-3,\\y=-x-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{1}{3},\\y=-\frac{7}{3},\end{cases}$ 故当 $a=0$ 时，满足题意；当 $a\neq0$ 时，可得 $ax^2+(a-1)x-2=2x-3$ 有两个相等的实数根，即 $ax^2+(a-3)x+1=0$ 有两个相等的实数根，所以 $\Delta=(a-3)^2-4a=0$，解得 $a=1$ 或 9. 综上可得，$a=0,1$ 或 9. 故选 B.

**7.** C **[解析]** 如图①，作出平行四边形 $OACB$，连接 $OC$，设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OC}$. 在平行四边形 $OACB$ 中，$OA=1$，$\angle OCA=\frac{\pi}{6}$，延长 $OA$ 至 $OD$，使 $OA=AD$，连接 $AB$，$CD$，则 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 由正弦定理，得 $\triangle OAC$ 的外接圆的直径 $2R=\frac{OA}{\sin\angle OCA}=2$，所以外接圆半径 $R=1$. 设外接圆圆心为 $G$，连接 $OG$，$DG$，如图②，易知 $\angle GOD=\frac{\pi}{3}$，又 $OG=1$，$OD=2$，所以由余弦定理可得 $DG=\sqrt{1^2+2^2-2\times1\times2\times\cos\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}$，所以 $|\overrightarrow{CD}|\leqslant DG+R=\sqrt{3}+1$，故 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的最大值为 $\sqrt{3}+1$. 故选 C.



①



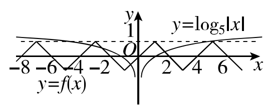
②

**8.** B **[解析]** 设 $\triangle AF_1F_2$，$\triangle BF_1F_2$ 的内切圆圆心分别为 $O_1$，$O_2$，设 $\triangle AF_1F_2$ 的内切圆与 $x$ 轴相切于点 $H$，由双曲线的定义得 $|AF_1|-|AF_2|=2a$，由圆的切线长定理得 $|HF_1|-|HF_2|=2a$，所以 $H$ 的横坐标为 $a$，则点 $H$ 是双曲线的右顶点. 同理可得点 $H$ 也是 $\triangle BF_1F_2$ 的内切圆与 $x$ 轴的切点. 连接 $O_1O_2$，$O_1F_2$，$O_2F_2$，则 $O_1O_2\perp x$ 轴，设直线 $AB$ 的倾斜角为 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\angle O_1F_2H=\frac{\pi-\theta}{2}$，$\angle O_2F_2H=\frac{\theta}{2}$，又 $|F_2H|=c-a$，所以 $r_1=|O_1H|=(c-a)\tan\frac{\pi-\theta}{2}$，$r_2=|O_2H|=(c-a)\tan\frac{\theta}{2}$，所以 $3(c-a)\tan\frac{\pi-\theta}{2}=4(c-a)\tan\frac{\theta}{2}$，可得 $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $k_{AB}=\tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=4\sqrt{3}$，又 $\frac{b}{a}<k_{AB}=4\sqrt{3}$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$，所以 $e\in(1,7)$. 故选 B.

**9.** BC **[解析]** 对于 A，由 $x^4+y^4=1$，令 $y=0$，可得 $x^4=1$，解得 $x=1$ 或 $x=-1$，所以曲线 $E$ 与 $x$ 轴只有 $(1,0)$ 和 $(-1,0)$ 这 2 个交点，故 A 错误；对于 B，因为 $(-x)^4+(-y)^4=x^4+y^4=1$，所以点 $(x,y)$ 和点 $(-x,-y)$ 均在曲线 $E$ 上，所以曲线 $E$ 关于原点 $O$ 对称，故 B 正确；对于 C，因为 $x^4+y^4=1$，所以 $|x|\leqslant1$ 且 $|y|\leqslant1$，所以曲线 $E$ 上的点都在直线 $x=1$，$x=-1$，$y=1$，$y=-1$ 所围成的矩形内(包含边上的点)，所以曲线 $E$ 上的点都在某个矩形内，故 C 正确；对于 D，因为 $|x|\leqslant1$，且 $|y|\leqslant1$，所以 $x^2\geqslant x^4$，$y^2\geqslant y^4$，所以 $x^2+y^2\geqslant x^4+y^4=1$，所以曲线 $E$ 上的点到原点 $O$ 的距离 $d=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant1$，故 D 错误. 故选 BC.

**10.** BC **[解析]** 对于 A 选项，$\overline{y}_A=2\overline{x}_A-0.6=2\times5.2-0.6=9.8$，$\overline{y}_B=1.5\overline{x}_B+0.4=1.5\times6+0.4=9.4$，$\therefore\overline{y}_A>\overline{y}_B$，故 A 错误；对于 B 选项，点 $P$ 到直线 $l_A$ 的距离 $d_A=\frac{|8.6-2\times5.6+0.6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$，点 $P$ 到直线 $l_B$ 的距离 $d_B=\frac{|8.6-1.5\times5.6-0.4|}{\sqrt{1^2+(-1.5)^2}}=\frac{0.2}{\sqrt{3.25}}$，则 $d_A>d_B$，故 B 正确；对于 C 选项，点 $P$ 与点 $(\overline{x}_A,\overline{y}_A)$ 间的距离 $h_A=\sqrt{(5.6-5.2)^2+(8.6-9.8)^2}=\sqrt{0.4^2+1.2^2}$，点 $P$ 与点 $(\overline{x}_B,\overline{y}_B)$ 间的距离 $h_B=\sqrt{(5.6-6)^2+(8.6-9.4)^2}=\sqrt{0.4^2+0.8^2}$，$\therefore h_A>h_B$，故 C 正确；对于 D 选项，$\because r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$，$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\therefore\frac{r}{\hat{b}}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}=\frac{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}=\frac{\sqrt{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}=\frac{s_x}{s_y}$，$\therefore\frac{r_A}{\hat{b}_A}=\frac{s_{x_A}}{s_{y_A}}$，则 $s_{y_A}=\frac{2\times0.3}{0.6}=1$，$\frac{r_B}{\hat{b}_B}=\frac{s_{x_B}}{s_{y_B}}$，则 $s_{y_B}=\frac{0.1\times1.5}{0.3}=0.5$，$\therefore s_{y_A}>s_{y_B}$，故 D 错误. 故选 BC.

**11.** BC **[解析]** 用 $x$ 替换 $2x$，得 $f(x-1)=f(3-x)$，所以 $f(x+2)=f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，易知函数 $f(x)$ 的最小正周期为 4，故 A 错误；当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x$，所以函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，因为函数 $f(x)$ 的最小正周期为 4，所以函数 $f(x)$ 在 $[2024,2025]$ 上单调递增，故 B 正确；因为 $f(0)=0$，$f(1)=1$，当 $x=0$ 时，$f(2)=f(0)=0$，当 $x=1$ 时，$f(3)=-f(1)=-1$，又 $f(4)=f(0)=0$，所以 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0$，则 $\sum\limits_{k=1}^{22}f(k)=5[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+f(1)+f(2)=1$，故 C 正确；当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x$，结合 $f(x)$ 的周期性及其图象的对称性作出函数 $f(x)$ 的图象，如图所示，作出 $y=\log_5|x|$ 的图象，由图知两函数图象共有 5 个交点，即方程 $f(x)=\log_5|x|$ 有 5 个根，故 D 错误. 故选 BC.




**12.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$ **[解析]** 在 $\triangle ABC$ 中，$B+C=60°$，所以 $A=120°$，所以 $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin120°}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，由正弦定理可得 $\frac{\sin A+\sin B-\sin C}{a+b-c}=\frac{\sin A}{a}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

**13.** $\sqrt{10}-2\sqrt{2}$ **[解析]** 设点 $P(x,y)$，则 $\overrightarrow{PA}=(1-x,-y)$，$\overrightarrow{PB}=(5-x,-y)$，由 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\leqslant4$，得 $(x-1)(x-5)+y^2\leqslant4$，即 $(x-3)^2+y^2\leqslant8$，则点 $P$ 在以点 $C(3,0)$ 为圆心，$2\sqrt{2}$ 为半径的圆上及其内部. 点 $C(3,0)$ 到直线 $3x-y+1=0$ 的距离 $d=\frac{|3\times3-0+1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}>2\sqrt{2}$，所以点 $P$ 到直线 $3x-y+1=0$ 的距离的最小值为 $d-2\sqrt{2}=\sqrt{10}-2\sqrt{2}$.

**14.** 573 **[解析]** 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$ $(d\neq0)$，因为 $a_2$，$a_5$，$a_{14}$ 成等比数列，所以 $a_2a_{14}=a_5^2$，即 $(5-d)(5+11d)=(5+2d)^2$，解得 $d=2$ 或 $d=0$(舍去)，所以 $a_n=5+2(n-3)=2n-1$，则 $a_{100}=199$. 当 $2^n\leqslant x<2^{n+1}$ 时，$[\log_2x]=n$，所以 $[\log_2(2^n+1)]=[\log_2(2^n+3)]=\cdots=$

$[\log_2(2^{n+1}-1)]=n$,共有 $2^{n-1}$ 个 $n$,因为 $2^7<199<2^8$,所以 $S_{100}=b_1+b_2+\cdots+b_{100}=[\log_2 1]+[\log_2 3]+\cdots+[\log_2 199]=0+2^0\times1+2^1\times2+2^2\times3+2^3\times4+2^4\times5+2^5\times6+\frac{199-127}{2}\times7=1\times2^0+2\times2^1+3\times2^2+4\times2^3+5\times2^4+6\times2^5+36\times7$,令 $T=1\times2^0+2\times2^1+3\times2^2+4\times2^3+5\times2^4+6\times2^5$,则 $2T=1\times2^1+2\times2^2+3\times2^3+4\times2^4+5\times2^5+6\times2^6$,两式相减得 $-T=2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5-6\times2^6$,则 $T=5\times2^6+1$,所以 $S_{100}=5\times2^6+1+36\times7=573$.

## 小题 9 "8+3+3"73 分练

1. D 【解析】由题意知 $z=\frac{3+i}{1-i}=\frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=1+2i$,所以 $\overline{z}=1-2i$,所以 $\overline{z}$ 在复平面内对应的点位于第四象限.故选 D.

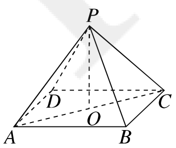
2. B 【解析】$A=\{x\in\mathbf{Z}|x+1>0\}=\{x\in\mathbf{Z}|x>-1\}$,因为 $A\cap B$ 中有 2 个元素,所以 $A\cap B=\{0,1\}$,所以 $1\leqslant a<2$.故选 B.

3. A 【解析】$\sin\left(\frac{5\pi}{4}-x\right)=\sin\left[\frac{3\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]=-\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=-\frac{1}{3}$.故选 A.

4. D 【解析】将甲、乙捆绑看作一个元素,由丙不能在第一个与最后一个发言,知丙的位置有 3 个,将剩余 4 个元素全排列有 $A_4^4$ 种方法,故不同的安排方法共有 $3\times A_2^2\times A_4^4=144$(种).故选 D.

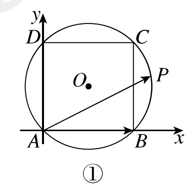
5. D 【解析】由 $a(a+1)>0$,得 $a>0$ 或 $a<-1$.当 $a>0$ 时,$e=\sqrt{1+\frac{a+1}{a}}=\sqrt{2+\frac{1}{a}}>\sqrt{2}$;当 $a<-1$ 时,双曲线方程为 $\frac{y^2}{-a-1}-\frac{x^2}{-a}=1$,$e=\sqrt{1+\frac{-a}{-a-1}}=\sqrt{2-\frac{1}{a+1}}>\sqrt{2}$.综上可得,$e>\sqrt{2}$.故选 D.

6. A 【解析】如图,连接 $AC$,设 $AC$ 的中点为 $O$,连接 $OP$,则 $OP\perp$平面 $ABCD$,因为四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的底面是边长为 2 的正方形,所以 $OA=OC=\sqrt{2}$,又 $PC=2$,所以由勾股定理得 $PO=\sqrt2$,故四棱锥的体积为 $\frac13\times2^2\times\sqrt2=\frac{4\sqrt2}{3}$,四棱锥的表面积为 $4\times\frac12\times2^2\times\frac{\sqrt3}{2}+2^2=4\sqrt3+4$.设内切球的半径为 $r$,则由等体积法可得 $\frac13(4\sqrt3+4)r=\frac{4\sqrt2}{3}$,解得 $r=\frac{\sqrt6-\sqrt2}{2}$,所以内切球的表面积 $S=(8-4\sqrt3)\pi$.故选 A.

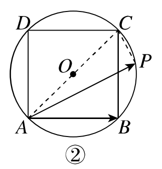



7. C 【解析】方法一:如图①,以 $A$ 为坐标原点,$AB,AD$ 所在直线分别为 $x$ 轴、$y$ 轴,建立平面直角坐标系,则 $A(0,0)$,$B(1,0)$.设 $P(x,y)$,则 $\overrightarrow{AP}=(x,y)$.因为 $\overrightarrow{AB}=(1,0)$,所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=x$.由题意知,圆 $O$ 的半径 $r=\frac{\sqrt2}{2}$.因为点 $P$ 在劣弧 $BC$(包括端点)上,所以 $1\leqslant x\leqslant\frac12+\frac{\sqrt2}{2}$,所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围是 $\left[1,\frac{1+\sqrt2}{2}\right]$.

方法二:如图②,连接 $AC$,$CP$.易知 $\angle BAC=\frac{\pi}{4}$,设 $\angle PAB=\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$,则 $\angle PAC=\frac{\pi}{4}-\theta$.由已知可得 $|\overrightarrow{AB}|=1,|\overrightarrow{AC}|=\sqrt2,\angle APC=\frac{\pi}{2}$,所以 $|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{AC}|\cos\angle PAC=\sqrt2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$,所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|\cos\theta=\sqrt2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\cos\theta=\sqrt2\left(\frac{\sqrt2}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt2}{2}\sin\theta\right)\cos\theta=(\cos\theta+\sin\theta)\cos\theta=\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta=\frac{1+\cos2\theta}{2}+\frac{\sin2\theta}{2}=\frac12+\frac{\sqrt2}{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)$.因为 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$,所以 $\frac{\pi}{4}\leqslant2\theta+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{4}$,所以 $\frac{\sqrt2}{2}\leqslant\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant1$,所以 $1\leqslant\frac12+\frac{\sqrt2}{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\frac{1+\sqrt2}{2}$,即 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围是 $\left[1,\frac{1+\sqrt2}{2}\right]$.故选 C.



①



②

8. D 【解析】$f(x)=a^x+b^x$,$a>0$ 且 $a\neq1$,$b>0$ 且 $b\neq1$,$f'(x)=a^x\ln a+b^x\ln b$,令 $g(x)=f'(x)$,则 $g'(x)=a^x(\ln a)^2+b^x(\ln b)^2>0$ 恒成立,故 $f'(x)=a^x\ln a+b^x\ln b$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,要使 $f(x)=a^x+b^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,只需 $f'(0)=\ln a+\ln b\geqslant0$,即只需 $ab\geqslant1$.对于 A,令 $h(x)=x-1-\ln x$,$x>1$,则 $h'(x)=1-\frac1x=\frac{x-1}{x}>0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立,故 $h(x)=x-1-\ln x$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,故 $h(1.2)>h(1)=0$,即 $0.2>\ln1.2$,则 $ab=5\ln1.2<5\times0.2=1$,A 不符合题意;对于 B,$ab=0.2\ln15=\frac{\ln15}{5}<\frac{\ln16}{5}<\frac{\ln16}{4}=\ln2<1$,B 不符合题意;对于 C,令 $q(x)=(1-x)e^x$,$x\in(0,1)$,则 $q'(x)=-e^x+(1-x)e^x=-xe^x<0$ 恒成立,故 $q(x)=(1-x)e^x$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,故 $q(0.2)<q(0)=1$,即 $ab=0.8e^{0.2}<1$,C 不符合题意;对于 D,令 $\varphi(x)=\frac{\ln x}{x}$,则 $\varphi'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,当 $x\in(e,+\infty)$ 时,$\varphi'(x)<0$,$\varphi(x)$ 单调递减,故 $\varphi(4)>\varphi(5)$,即 $\frac{\ln2}{2}=\frac{\ln4}{4}>\frac{\ln5}{5}$,因为 $\frac{1.8}{5}=0.36>\frac{\ln2}{2}$,所以 $\frac{1.8}{5}>\frac{\ln5}{5}$,所以 $e^{1.8}>5$,所以 $0.2e^{1.8}>1$,即 $ab=0.2e^{1.8}>1$,D 符合题意.故选 D.

9. AD 【解析】对于 A,因为 $\frac1a<\frac1b$,$ab>0$,所以 $\frac{ab}{a}<\frac{ab}{b}$,可得 $a>b$,故 A 选项正确;对于 B,取 $a=1,b=2$,此时满足 $|a-2|>|b-2|$,但 $a<b$,故 B 选项错误;对于 C,由 $a^2b-ab^2>a-b$ 可得 $a^2b+b>ab^2+a$,则 $b(a^2+1)>a(b^2+1)$,因为 $a,b>0$,所以 $\frac{a^2+1}{a}>\frac{b^2+1}{b}$,即 $a+\frac1a>b+\frac1b$,又函数 $y=x+\frac1x$ 在 $(0,+\infty)$ 上不单调,所以不能得到 $a>b$,故 C 选项错误;对于 D,由 $\ln(a^2+1)>\ln(b^2+1)$ 可知 $a^2>b^2$,因为 $a,b>0$,所以 $a>b$,故 D 选项正确.故选 AD.

10. ACD 【解析】依题意,$f(x)=\sqrt3\sin2\omega x+\cos2\omega x=2\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$,由 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2$,得 $2\omega\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,解得 $\omega=3k+\frac12,k\in\mathbf{Z}$,又 $0<\omega<1$,所以 $\omega=\frac12$,则 $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.$f(x)$ 的最小正周期为 $2\pi$,A 正确;$y=f\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=2\cos2x$ 是偶函数,B 错误;$y=f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos x$,令 $g(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos x$,则 $g\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=2\cos x\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos x=g(x)$,则 $y=f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos x$ 的图象

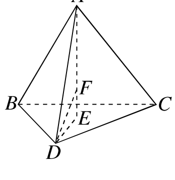
关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 对称,C正确;$f(tx)=2\sin\left(tx+\frac{\pi}{6}\right)$,$t>0$,当 $x\in[0,\pi]$ 时,$tx+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},t\pi+\frac{\pi}{6}\right]$,依题意知 $2\pi\leqslant t\pi+\frac{\pi}{6}<3\pi$,解得 $t\in\left[\frac{11}{6},\frac{17}{6}\right)$,D正确.故选ACD.

11. ABD 【解析】对于A选项,可以得到 $a_n=\begin{cases}1,n=4k+1,k\in\mathbf{N},\\0,n=4k+2,k\in\mathbf{N},\\-1,n=4k+3,k\in\mathbf{N},\\0,n=4k+4,k\in\mathbf{N},\end{cases}$ 故 $S_n=1$ 或0,令 $M=2$,则对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,都有 $|S_n|<M$,A正确;对于B选项,$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{n}$,故 $S_{2^m}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^m}\right)\geqslant\frac{m}{2}+1$,则对任意 $M>0$,取 $m=[2M]$($[2M]$是不超过 $2M$ 的最大整数),存在 $n=2^m$,使得 $|S_n|\geqslant\frac{[2M]}{2}+1>M$,B正确;对于C选项,下面证 $\sin x\geqslant\frac{2}{\pi}x$,$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,令 $f(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x$,$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,则 $f'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减,因为 $f'(0)=1-\frac{2}{\pi}>0$,$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}=-\frac{2}{\pi}<0$,所以存在 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,使得 $f'(x_0)=0$,当 $x\in(0,x_0)$ 时,$f'(x)>0$,当 $x\in\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时,$f'(x)<0$,故 $f(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增,在 $\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减,又 $f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$,故 $f(x)\geqslant0$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立,即 $\sin x\geqslant\frac{2}{\pi}x$,$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,令 $0<\frac{1}{n}<\frac{\pi}{2}$,则有 $\sin\frac{1}{n}\geqslant\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}$,又由B选项可知,当 $a_n=\frac{1}{n}$ 时,对任意 $M>0$,存在 $n\in\mathbf{N}^*$,使得 $|S_n|>M$,同理当 $a_n=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}$ 时,对任意 $M>0$,存在 $n\in\mathbf{N}^*$,使得 $|S_n|>M$,故当 $a_n=\sin\frac{1}{n}$ 时,对任意 $M>0$,存在 $n\in\mathbf{N}^*$,使得 $|S_n|>M$,C错误;对于D选项,若对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,存在 $M_1>0$,使得 $|S_n|<M_1$,则 $|a_n|=|S_n-S_{n-1}|\leqslant|S_n|+|S_{n-1}|<2M_1$,故对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,存在 $M_2=2M_1>0$,使得 $|a_n|<M_2$,D正确.故选ABD.

12. $\frac{2}{5}$ 【解析】设甲获得冠军为事件 $A$,比赛共进行了三局为事件 $B$,则 $P(A)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{20}{27}$,$P(AB)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$,所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{8}{27}}{\frac{20}{27}}=\frac{2}{5}$.

13. $\frac{10}{7}$ 【解析】设线段 $AF_2$ 的中垂线与 $AF_2$ 相交于点 $M$,由椭圆方程 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 可知 $a=3$,$b=\sqrt{5}$,所以 $c=2$.连接 $AF_1$,由已知得 $|AF_1|=|F_1F_2|=2c=4$,又点 $A$ 在椭圆上,所以根据椭圆的定义有 $|AF_1|+|AF_2|=2a=6$,所以 $|AF_2|=2$,所以 $|AM|=|MF_2|=1$.在 $\mathrm{Rt}\triangle F_1F_2M$ 中,$\cos\angle F_1F_2M=\frac{|F_2M|}{|F_1F_2|}=\frac{1}{4}$,又 $\angle F_1F_2M+\angle F_1F_2B=\pi$,所以 $\cos\angle F_1F_2B=-\frac{1}{4}$.连接 $F_1B$,因为点 $B$ 在椭圆上,所以根据椭圆的定义有 $|BF_1|+|BF_2|=2a=6$,设 $|BF_2|=m$,则 $|BF_1|=6-m$,$|F_1F_2|=4$,在 $\triangle F_1F_2B$ 中,由余弦定理得 $\cos\angle F_1F_2B=\frac{|F_1F_2|^2+|BF_2|^2-|BF_1|^2}{2|F_1F_2|\cdot|BF_2|}=\frac{16+m^2-(6-m)^2}{8m}=-\frac{1}{4}$,解得 $m=\frac{10}{7}$,即 $|BF_2|=\frac{10}{7}$.

14. $6\sqrt{3}$ 27 【解析】该组合体一共有24个面,每一个面都是全等的边长为1的等边三角形,则其表面积为 $24\times\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin\frac{\pi}{3}=6\sqrt{3}$.该组合体的外接球也是任意一个正四面体的外接球,用一个正四面体来研究.如图,在正四面体 $ABCD$ 中,$E$ 是 $\triangle BCD$ 的中心,$F$ 是外接球的球心,连接 $AE,DE,DF$,则 $F$ 在 $AE$ 上,$2DE\cos\frac{\pi}{6}=DC$,可得 $DE=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,则 $AE=\sqrt{2^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.设外接球的半径为 $R$,则 $AF=DF=R$,又 $AF+EF=AE$,$DF^2=EF^2+DE^2$,




所以 $R=\frac{\sqrt{6}}{2}$.两正交四面体公共部分一共有8个面,且每一个面都是全等的边长为1的等边三角形,则其表面积为 $8\times\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$,大正四面体的体积为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin\frac{\pi}{3}\times\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,则每个小正四面体的体积为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{2}}{12}$,则公共部分的体积为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}-4\times\frac{\sqrt{2}}{12}=\frac{\sqrt{2}}{3}$,设其内切球的半径为 $r$,则公共部分的体积也可表示为 $\frac{1}{3}\times2\sqrt{3}r=\frac{\sqrt{2}}{3}$,解得 $r=\frac{\sqrt{6}}{6}$,故所求比值为 $\left(\frac{R}{r}\right)^3=27$.

## 小题10 “8+3+3”73分练

1. D 【解析】根据全称量词命题的否定是存在量词命题可知,命题“$\forall x\in\mathbf{R}$,$e^x-x-1\geqslant0$”的否定是“$\exists x\in\mathbf{R}$,$e^x-x-1<0$”.故选D.

2. A 【解析】由题意可得 $\begin{cases}2m\times2-3>0,\\2m\times1-3\leqslant0,\end{cases}$ 解得 $\frac{3}{4}<m\leqslant\frac{3}{2}$.故选A.

3. C 【解析】根据频率分布条形图可知 $n_1=4$,$n_2=5$,即 $n_1<n_2$;显然A部门的得分更集中,其方差更小,即 $s_1^2<s_2^2$.故选C.

4. C 【解析】对于A,由 $\alpha/\!/\beta$,$l\perp\alpha$ 可得 $l\perp\beta$,又 $m\perp\beta$,所以 $l/\!/m$,即“$l/\!/m$”是“$\alpha/\!/\beta$”的必要条件,故A错误;对于B,由 $m\perp\beta$,$l\perp m$ 可得 $l\subset\beta$ 或 $l/\!/\beta$,当 $l\subset\beta$ 时,由 $l\perp\alpha$,可得 $\alpha\perp\beta$,当 $l/\!/\beta$ 时,经过 $l$ 和平面 $\beta$ 内一点可确定平面 $\gamma$,设 $\gamma\cap\beta=l'$,则 $l/\!/l'$,由 $l\perp\alpha$ 可得 $l'\perp\alpha$,同理可得 $\alpha\perp\beta$,即“$l\perp m$”是“$\alpha\perp\beta$”的充分条件,故B错误;对于C,假设 $\alpha,\beta$ 没有公共点,则 $\alpha/\!/\beta$,又由 $l\perp\alpha$,$m\perp\beta$ 可得 $l/\!/m$,这与 $l,m$ 异面矛盾,故假设不成立,故C正确;对于D,由 $\alpha,\beta$ 有公共点,可得 $\alpha,\beta$ 相交,又 $l\perp\alpha$,$m\perp\beta$,所以 $l,m$ 相交或异面,故D错误.故选C.

5. D 【解析】由题意可得 $a_{n+1}-a_n=a_1+2n$,则可得 $a_2-a_1=a_1+2$,$a_3-a_2=a_1+4$,$\cdots$,$a_{10}-a_9=a_1+18$,将以上各式相加,得 $a_{10}-a_1=9a_1+\frac{9\times(2+18)}{2}=9a_1+90$,即 $a_{10}=10a_1+90$,又 $a_{10}=130$,所以 $a_1=4$.故选D.

6. D 【解析】根据题意,设小球半径为 $R$,因为小球与四棱台的每个面都相切,所以四棱台的体积等于以球心为顶点,以四棱台的上、下底面和四个侧面为底面的六个四棱锥的体积之和,这六个四棱锥的高都是球的半径 $R$,该四棱台的高是 $2R$,则该四棱台的体积 $V=\frac{R}{3}(S_1+$

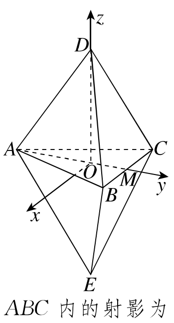
$S_2+S)=\frac{2R}{3}(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})$，变形可得 $S=S_1+S_2+2\sqrt{S_1S_2}=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$，则有 $\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}$. 故选 D.

7. C 【解析】因为 $\omega>0$，且 $x\in[0,2\pi]$，所以 $\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},2\pi\omega+\frac{\pi}{6}\right]$，由题意可得 $4\pi\leqslant 2\pi\omega+\frac{\pi}{6}<5\pi$，解得 $\frac{23}{12}\leqslant\omega<\frac{29}{12}$，又因为直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 为函数 $y=f(x)$ 图象的一条对称轴，所以 $\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\omega=6k+2$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $k=0$，$\omega=2$，则 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，所以 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$. 故选 C.

8. C 【解析】设直线 $y=x$ 与函数 $y=\ln(x+a)+b$ 的图象相切于点 $Q(x_0,y_0)$，则 $\begin{cases}y_0=x_0,\\ y_0=\ln(x_0+a)+b,\end{cases}$ 所以 $\ln(x_0+a)+b=x_0$，又 $[\ln(x+a)+b]'=\frac{1}{x+a}$，所以 $\frac{1}{x_0+a}=1$，即 $x_0+a=1$，所以 $\ln 1+b=x_0$，即 $b=x_0$，所以 $a+b=1$，所以 $\mathrm{e}^a+b=\mathrm{e}^a-a+1$. 令 $f(x)=\mathrm{e}^x-x+1$，则 $f'(x)=\mathrm{e}^x-1$. 当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 所以当 $x=0$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $f(0)=2$，所以 $\mathrm{e}^a+b$ 的最小值为 2. 故选 C.

9. BC 【解析】对于 A，取 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(-1,-1)$，满足 $\boldsymbol{a}\gg\boldsymbol{b}$，取 $\mu=-1$，$\lambda=2$，则 $-\boldsymbol{a}=(-1,-1)$，$2\boldsymbol{b}=(-2,-2)$，满足 $\mu\boldsymbol{a}\gg\lambda\boldsymbol{b}$，但 $\mu<\lambda$，A 错误；对于 B，因为 $2022<2023$，$2024\leqslant 2025$，所以 $\boldsymbol{a}\ll\boldsymbol{b}$，B 正确；对于 C，设向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，$\boldsymbol{c}=(x_0,y_0)$，由 $\boldsymbol{a}\gg\boldsymbol{b}$，得 $x_1\geqslant x_2$ 且 $y_1>y_2$，则 $x_1+x_0\geqslant x_2+x_0$ 且 $y_1+y_0>y_2+y_0$，所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\gg(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，C 正确；对于 D，根据 $\boldsymbol{a}\ll\boldsymbol{b}$，取向量 $\boldsymbol{a}=(-2,-2)$，$\boldsymbol{b}=(-1,-1)$，$\boldsymbol{c}=(-1,-1)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=4$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=2$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}>\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，D 错误. 故选 BC.

10. AC 【解析】对于 A，$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，所以该几何体的表面积为 $6\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，故 A 正确. 对于 B，如图所示，设点 $D$ 在平面 $ABC$ 内的射影为 $O$，连接 $DO$，$AO$，延长 $AO$ 交 $BC$ 于 $M$，则 $M$ 为 $BC$ 的中点，$AO=\frac{2}{3}AM=\frac{2}{3}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，又因为 $AD=1$，所以正三棱锥 $D\text{-}ABC$ 的高为 $DO=\sqrt{AD^2-AO^2}=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以该几何体的体积为 $2\times\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{6}$，故 B 错误. 对于 C，由 B 选项可知 $DO\perp$ 平面 $ABC$，由对称性可知 $D$，$O$，$E$ 三点共线，连接 $DE$，则 $DE\perp$ 平面 $ABC$，又 $DE\subset$ 平面 $ADE$，所以平面 $ADE\perp$ 平面 $ABC$，故 C 正确. 对于 D，以 $O$ 为坐标原点，$OM$，$OD$ 所在直线分别为 $y$，$z$ 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，因为 $AO=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $OM=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，则 $B\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},0\right)$，$C\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},0\right)$，$E\left(0,0,-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，所以 $\overrightarrow{BC}=(-1,0,0)$，$\overrightarrow{BE}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$. 设平面 $BCE$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则有 $\begin{cases}-x=0,\\ -\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{6}y-\frac{\sqrt{6}}{3}z=0,\end{cases}$ 取 $z=1$，可得 $y=-2\sqrt{2}$，$x=0$，所以 $\boldsymbol{n}=(0,-2\sqrt{2},1)$. 因为 $A\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$，$D\left(0,0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，所以 $\overrightarrow{AD}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，又 $\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}=-\frac{2\sqrt{6}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}=-\frac{\sqrt{6}}{3}\neq0$，所以直线 $AD$ 与平面 $BCE$ 不平行，故 D 错误. 故选 AC.




11. ACD 【解析】对于 A 选项，$X_1$ 的可能取值为 5，7，且 $P(X_1=7)=P(X_1=5)=\frac{1}{2}$，故 $E(X_1)=5\times\frac{1}{2}+7\times\frac{1}{2}=6$，A 正确. 对于 B 选项，$X_2=12$，即 2 次旋转中，1 次按顺时针方向旋转，1 次按逆时针方向旋转，故 $P(X_2=12)=C_2^1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，B 错误. 对于 C 选项，$X_7=7$，即 7 次旋转后，顺时针走了 $210°$ 或逆时针走了 $150°$，设硬币正面朝上的次数为 $x$，则反面朝上的次数为 $7-x$，由 $150°(7-x)-150°x=150°$，解得 $x=3$，故 $P(X_7=7)=C_7^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{35}{128}$，C 正确. 对于 D 选项，若硬币 8 次均正面朝上，此时 $X_8=4$，故 $P(X_8=4)=C_8^8\times\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{1}{256}$，若硬币 7 次正面朝上，1 次反面朝上，此时 $X_8=6$，故 $P(X_8=6)=C_8^7\times\left(\frac{1}{2}\right)^7\times\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{32}$，若硬币 6 次正面朝上，2 次反面朝上，此时 $X_8=8$，故 $P(X_8=8)=C_8^6\times\left(\frac{1}{2}\right)^6\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7}{64}$，若硬币 5 次正面朝上，3 次反面朝上，此时 $X_8=10$，故 $P(X_8=10)=C_8^5\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{7}{32}$，若硬币 4 次正面朝上，4 次反面朝上，此时 $X_8=12$，故 $P(X_8=12)=C_8^4\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{35}{128}$，若硬币 3 次正面朝上，5 次反面朝上，此时 $X_8=2$，故 $P(X_8=2)=C_8^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{7}{32}$，若硬币 2 次正面朝上，6 次反面朝上，此时 $X_8=4$，故 $P(X_8=4)=C_8^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{7}{64}$，若硬币 1 次正面朝上，7 次反面朝上，此时 $X_8=6$，故 $P(X_8=6)=C_8^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{1}{32}$，若硬币 8 次均反面朝上，此时 $X_8=8$，故 $P(X_8=8)=C_8^0\times\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{1}{256}$，故 $E(X_8)=4\times\frac{1}{256}+6\times\frac{1}{32}+8\times\frac{7}{64}+10\times\frac{7}{32}+12\times\frac{35}{128}+2\times\frac{7}{32}+4\times\frac{7}{64}+6\times\frac{1}{32}+8\times\frac{1}{256}=\frac{489}{64}>6$，D 正确. 故选 ACD.

12. $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 【解析】设 $z=a+b\mathrm{i}$，$a,b\in\mathbf{R}$，则 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$，因为 $z\cdot\bar{z}=2(z+\bar{z})=4$，所以 $\begin{cases}z\cdot\bar{z}=a^2+b^2=4,\\ 2(z+\bar{z})=4a=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=\sqrt{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1,\\ b=-\sqrt{3},\end{cases}$ 又因为 $z$ 在复平面内对应的点不在第一象限，所以 $b\leqslant0$，可知 $\begin{cases}a=1,\\ b=-\sqrt{3},\end{cases}$ 所以 $z=1-\sqrt{3}\mathrm{i}$.

13. $\frac{1}{3}$　$\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{8}=1$ 【解析】因为 $\overrightarrow{PF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PA}+m\overrightarrow{PB}$，$F$，$A$，$B$ 三点共线，所以 $m+\frac{2}{3}=1$，即 $m=\frac{1}{3}$，所以 $\overrightarrow{PF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PB}$，即 $\overrightarrow{PF}-\overrightarrow{PA}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA})$，可得 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，所以 $\overrightarrow{FB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，于是 $\overrightarrow{FB}=2\overrightarrow{AF}$，即 $a+c=2(a-c)$，则 $\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$，即 $e=\frac{1}{3}$. 因为 $P\left(\frac{8}{3},1\right)$ 为椭圆 $C$ 上一点，所以 $\frac{1}{a^2}+$

$\frac{\frac{64}{9}}{b^2}=1$，即 $\frac{1}{a^2}+\frac{64}{9b^2}=1$，由 $\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$，得 $a^2=9c^2$，所以 $b^2=8c^2$，所以 $\frac{1}{9c^2}+\frac{64}{9\times 8c^2}=1$，解得 $c^2=1$，则 $\begin{cases}a^2=9,\\ b^2=8,\end{cases}$ 故椭圆 $C$ 的方程为 $\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{8}=1$.

14. $\frac{2}{3}$ 【解析】由 $c+2\sqrt{3}\cos C=2b$ 可得 $c+2\sqrt{3}\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2\times\sqrt{3}b}=2b$，即 $b^2+c^2-a^2=bc$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$，则 $A=\frac{\pi}{3}$. 连接 $OB,OC$，由正弦定理可得圆 $O$ 的半径为 $\frac{1}{2}\times\frac{a}{\sin A}=1$，即 $|\overrightarrow{AO}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$. 根据余弦定理可知 $\cos\angle BOC=\frac{|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2-a^2}{2|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|}=\frac{1+1-3}{2}=-\frac{1}{2}$，则 $\angle BOC=\frac{2\pi}{3}$，又 $\overrightarrow{AO}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}=m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+n(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}+(m+n)\overrightarrow{AO}$，所以 $(1-m-n)\overrightarrow{AO}=m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}$，所以 $(1-m-n)^2|\overrightarrow{AO}|^2=m^2|\overrightarrow{OB}|^2+n^2|\overrightarrow{OC}|^2+2mn|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|\cos\angle BOC$，所以 $(1-m-n)^2=m^2+n^2-mn$，整理可得 $3mn=2m+2n-1$，又 $mn\leqslant\left(\frac{m+n}{2}\right)^2$，所以 $2(m+n)-1\leqslant\frac{3}{4}(m+n)^2$，解得 $m+n\leqslant\frac{2}{3}$ 或 $m+n\geqslant 2$. 当 $m+n\geqslant 2$ 时，点 $O$ 在 $\triangle ABC$ 外部，且 $\angle BOC+A=\pi$，所以 $B,O,C,A$ 四点共圆，不满足题意，舍去，所以 $m+n\leqslant\frac{2}{3}$（当且仅当 $m=n=\frac{1}{3}$ 时取等号），故 $m+n$ 的最大值为 $\frac{2}{3}$.

### 小题 11 “8+3+3”73 分练

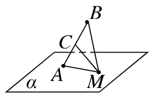
1. C 【解析】由题意，当 $x=1$ 时，$z=x^y=1$，当 $x=2,y=2$ 时，$z=x^y=4$，当 $x=2,y=4$ 时，$z=x^y=16$，故 $C$ 中有 3 个元素，故选 C.

2. B 【解析】由题意得参考的总人数为 $500+800+700=2000$，故三所学校高三年级参考学生数学成绩的总样本平均数为 $\frac{500}{2000}\times 92+\frac{800}{2000}\times 105+\frac{700}{2000}\times 100=100$. 故选 B.

3. C 【解析】由 $a_1=2,a_2=1,a_{n+1}=a_n-a_{n-1}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，得 $a_3=a_2-a_1=-1$，$a_4=a_3-a_2=-2$，$a_5=a_4-a_3=-1$，$a_6=a_5-a_4=1$，$a_7=a_6-a_5=2$，$a_8=a_7-a_6=1$，…，则 $\{a_n\}$ 是以 6 为周期的周期数列，所以 $a_{2024}=a_{337\times 6+2}=a_2=1$. 故选 C.

4. D 【解析】由 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，得 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{5}$. 由 $(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})\perp\boldsymbol{a}$，得 $(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{a}=0$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}^2=10$. 由 $|\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}|=4$，得 $(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})^2=16$，即 $\boldsymbol{b}^2+4\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=16$，即 $\boldsymbol{b}^2+4\times 5-4\times 10=16$，所以 $|\boldsymbol{b}|=6$. 故选 D.

5. A 【解析】因为点 $M$ 到点 $A,B$ 的距离相等，所以动点 $M$ 的轨迹是线段 $AB$ 的中垂面与平面 $\alpha$ 的交线. 如图所示，取 $AB$ 的中点 $C$，连接 $CM$，可得 $CM\perp AB$，则 $AM=\frac{AC}{\cos\angle MAC}$. 因为直线 $AB$ 与平面 $\alpha$ 所成的角为 $45°$，所以 $\angle MAC$ 的最小值为 $45°$，故 $\cos\angle MAC$ 的最大值为 $\cos 45°$，所以线段 $AM$ 的长度的最小值为 $\frac{AC}{\cos 45°}=\frac{\frac{AB}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=4$. 故选 A.




6. D 【解析】$a=\log_2 3=\log_2\left(2\times\frac{3}{2}\right)=1+\log_2\frac{3}{2}=1+\frac{1}{\log_{\frac{3}{2}}2}$，$b=\log_8 12=\log_8\left(8\times\frac{3}{2}\right)=1+\log_8\frac{3}{2}=1+\frac{1}{\log_{\frac{3}{2}}8}$，$c=\lg 15=\lg\left(10\times\frac{3}{2}\right)=1+\lg\frac{3}{2}=1+\frac{1}{\log_{\frac{3}{2}}10}$，$\because 0<\log_{\frac{3}{2}}2<\log_{\frac{3}{2}}8<\log_{\frac{3}{2}}10$，$\therefore a>b>c$. 故选 D.

7. D 【解析】设 $P(x,y)$，$\because\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=3a^2$，$\therefore(x+a)(x-a)+y^2=3a^2$，即 $x^2+y^2=4a^2$，$\therefore$ 点 $P$ 在圆 $x^2+y^2=4a^2$ 上，该圆的圆心为 $(0,0)$，半径 $r_1=2a$. 又点 $P$ 在圆 $(x-a+1)^2+(y-a-2)^2=a^2$ 上，该圆的圆心为 $(a-1,a+2)$，半径 $r_2=a$，故两圆有公共点，可得 $|r_2-r_1|\leqslant\sqrt{(a-1)^2+(a+2)^2}\leqslant r_1+r_2$，整理可得 $\begin{cases}a^2+2a+5\geqslant 0,\\ 7a^2-2a-5\geqslant 0,\end{cases}$ 又 $a>0$，所以 $a\geqslant 1$. 故选 D.

8. A 【解析】由 $c^2-a^2=ab$，得 $c^2=a^2+ab$. 由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，所以 $a^2+ab=a^2+b^2-2ab\cos C$，所以 $a=b-2a\cos C$. 由正弦定理得 $\sin A=\sin B-2\sin A\cos C$，即 $\sin A=\sin(A+C)-2\sin A\cos C$，即 $\sin A=\sin C\cos A-\cos C\sin A=\sin(C-A)$，所以 $A=C-A$ 或 $A+C-A=\pi$（舍去），故 $C=2A$. 因为 $C=2A$，所以 $B=\pi-3A$. 由正弦定理得 $\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$，即 $\frac{2}{\sin 2A}=\frac{b}{\sin(\pi-3A)}=\frac{b}{\sin 3A}$，可得 $b=\frac{2\sin(A+2A)}{\sin 2A}=\frac{2\sin A(1-2\sin^2A)+2\cos A\cdot 2\sin A\cos A}{2\sin A\cos A}=\frac{1-2\sin^2A+2\cos^2A}{\cos A}=\frac{3-4\sin^2A}{\cos A}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{3\sin A-4\sin^3A}{\cos A}=3\tan A-4\tan A\sin^2A=3\tan A-\frac{4\tan A\sin^2A}{\cos^2A+\sin^2A}=3\tan A-\frac{4\tan^3A}{1+\tan^2A}=\frac{3\tan A-\tan^3A}{1+\tan^2A}$. 因为 $\pi-3A>0$，所以 $A<\frac{\pi}{3}$，所以 $0<\tan A<\sqrt{3}$. 设 $f(x)=\frac{3x-x^3}{1+x^2}$，$x\in(0,\sqrt{3})$，则 $f'(x)=\frac{(3-3x^2)(1+x^2)-(3x-x^3)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{-x^4-6x^2+3}{(1+x^2)^2}$. 令 $f'(x)>0$，得 $x^4+6x^2-3<0$，可得 $0<x^2<\frac{-6+\sqrt{36+12}}{2}=2\sqrt{3}-3<3$，令 $f'(x)<0$，可得 $2\sqrt{3}-3<x^2<3$，所以 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{2\sqrt{3}-3})$ 上单调递增，在 $(\sqrt{2\sqrt{3}-3},\sqrt{3})$ 上单调递减，所以当 $x=\sqrt{2\sqrt{3}-3}$ 时，$f(x)$ 有最大值，即当 $\tan^2A=2\sqrt{3}-3$ 时，$\triangle ABC$ 的面积最大，此时 $\cos C=\cos 2A=\cos^2A-\sin^2A=\frac{\cos^2A-\sin^2A}{\cos^2A+\sin^2A}=\frac{1-\tan^2A}{1+\tan^2A}=\frac{1-(2\sqrt{3}-3)}{1+(2\sqrt{3}-3)}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. 故选 A.

9. AD 【解析】对于 A，4 个北方城市的环比数据的极差为 $99.7-99.5=0.2$，4 个南方城市的环比数据的极差为 $99.6-99.3=0.3$，所以 4 个北方城市的环比数据的极差小于 4 个南方城市的环比数据的极差，故 A 正确；对于 B，4 个北方城市的环比数据的均值为 $\frac{99.5+99.6+99.6+99.7}{4}=99.6$，4 个南方城市的环比数据的均值为 $\frac{99.5+99.3+99.6+99.6}{4}=99.5$，所以 4 个北方城市的环比数据的均值大于 4 个南方城市的环比数据的均值，故 B 错误；对于 C，4 个北方城市的环比数据的方差为 $\frac{1}{4}\times[(99.5-99.6)^2+(99.6-99.6)^2+(99.6-99.6)^2+(99.7-99.6)^2]=0.005$，4 个南方城市的环比数据的方差为 $\frac{1}{4}\times[(99.5-99.5)^2+(99.3-99.5)^2+(99.6-99.5)^2+(99.6-99.5)^2]=0.015$，所以 4 个北方城市的环比数据的方差小于 4 个南方城市的环比数据的方差，故 C 错误；对于 D，4 个北方城市的环比数据的中位数为 $\frac{99.6+99.6}{2}=99.6$，4 个南方城市的环比数据的中位数为 $\frac{99.5+99.6}{2}=99.55$，所以 4 个北方城市的环比数据的中位数大于 4 个南方城市的环比数据的中位数，

故 D 正确.故选 AD.

10. ACD 【解析】因为抛物线 $C:y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点 $\left(\frac{p}{2},0\right)$ 在直线 $l:x+y-1=0$ 上,所以 $\frac{p}{2}+0-1=0$,解得 $p=2$,A 选项正确.设 $A\left(\frac{y_1^2}{4},y_1\right)$,$B\left(\frac{y_2^2}{4},y_2\right)$,将抛物线 $C:y^2=4x$ 的方程与直线 $l:x+y-1=0$ 的方程联立,得 $y^2=4(1-y)$,即 $y^2+4y-4=0$,由根与系数的关系得 $y_1+y_2=-4$,$y_1y_2=-4$,所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{y_1^2y_2^2}{16}+y_1y_2=\frac{16}{16}-4=-3$,B 选项错误.因为直线 $AB$ 的斜率为 $-1$,所以 $|AB|=\sqrt{2}|y_1-y_2|=\sqrt{2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{2}\times\sqrt{16+16}=8$,C 选项正确.设点 $D$ 的坐标为 $(4t^2,4t)$,点 $D$ 到直线 $AB$ 的距离为 $d$,则 $\triangle ABD$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot d=4d$,所以当 $\triangle ABD$ 的面积为 $4\sqrt{2}$ 时,$d=\sqrt{2}$.直线 $AB$ 的方程是 $x+y-1=0$,由点到直线的距离公式知,点 $D$ 到直线 $AB$ 的距离 $d=\frac{|4t^2+4t-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|4t^2+4t-1|}{\sqrt{2}}$,令 $d=\sqrt{2}$,得 $|4t^2+4t-1|=2$,即 $(4t^2+4t-1)^2-4=0$.由 $(4t^2+4t-1)^2-4=(4t^2+4t-3)(4t^2+4t+1)=(2t+1)^2[(2t+1)^2-4]=(2t+1)^2(2t-1)(2t+3)=16\left(t+\frac{1}{2}\right)^2\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t+\frac{3}{2}\right)=0$,解得 $t=-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{3}{2}$,所以有且仅有 3 个点 $D$,使得 $\triangle ABD$ 的面积为 $4\sqrt{2}$,D 选项正确.故选 ACD.

11. BCD 【解析】由 $f(x-1)+f(x+1)=f(-2)$,得 $f(x+1)+f(x+3)=f(-2)$,则 $f(x-1)=f(x+3)$,即 $f(x)=f(x+4)$,故 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数,C 正确;令 $x=-1$,得 $f(-2)+f(0)=f(-2)$,则 $f(0)=0$,故 $f(2024)=f(0)=0$,A 错误;由 $f(2x+6)=f(-2x)$,得 $f(x+6)=f(-x)$,则 $f(-x)=f(x+6)=f[(x-12)+6]=f(x-6)$,可得 $f(-3-x)=f(-3+x)$,故 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-3$ 对称,B 正确;由 $f(x+6)=f(-x)$,得 $f(x+3)=f(3-x)$,故 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称,所以直线 $x=-3+4n(n\in\mathbf{Z})$ 及 $x=3+4n(n\in\mathbf{Z})$ 均为 $f(x)$ 的图象的对称轴,所以 $f(-2)=f(0)=0$,$f\left(\frac{7}{2}\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)=1$,在 $f(x-1)+f(x+1)=f(-2)=0$ 中,令 $x=\frac{3}{2}$,得 $f\left(\frac{3}{2}-1\right)+f\left(\frac{3}{2}+1\right)=0$,即 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{5}{2}\right)=-1$,则 $f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{9}{2}\right)=-1$,故 $\sum_{k=1}^{2025}(-1)^k kf\left(k-\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right)+2f\left(\frac{3}{2}\right)-3f\left(\frac{5}{2}\right)+4f\left(\frac{7}{2}\right)-\cdots-2025f\left(\frac{4049}{2}\right)=(1-2-3+4)+\cdots+(2021-2022-2023+2024)+2025=2025$,D 正确.故选 BCD.

12. $\frac{3}{2}$ 【解析】因为 $|3+4i|=\sqrt{3^2+4^2}=5$,$(1-3i)\cdot z=|3+4i|$,所以 $z=\frac{5}{1-3i}=\frac{5(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$,所以复数 $z$ 的虚部为 $\frac{3}{2}$.

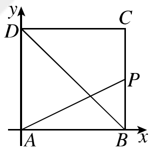
13. $\frac{2}{3}$ 1 【解析】设圆锥 $MM'$ 的底面半径为 $r$,球 $O$ 的半径为 $R$,因为圆锥 $MM'$ 的轴截面为正三角形,所以圆锥 $MM'$ 的高 $h=\sqrt{3}r$,母线长 $l=2r$.由题可知 $h=2R$,所以球 $O$ 的半径 $R=\frac{\sqrt{3}}{2}r$,所以圆锥 $MM'$ 的体积 $V_1=\frac{1}{3}\times(\pi\times r^2)\times\sqrt{3}r=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3$,球 $O$ 的体积 $V_2=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^3=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi r^3$,所以 $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3}{\frac{\sqrt{3}}{2}\pi r^3}=\frac{2}{3}$.圆锥 $MM'$ 的表面积 $S_1=\pi rl+\pi r^2=3\pi r^2$,球 $O$ 的表面积 $S_2=4\pi R^2=4\pi\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2=3\pi r^2$,所以 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi r^2}{3\pi r^2}=1$.

14. $\frac{1}{3}$ 【解析】因为 $a>0$,所以 $y=ax+b$ 在 $[t,t+1](t>0)$ 上单调递增,又 $y=\log_2 x$ 在 $[t,t+1](t>0)$ 上单调递增,所以 $y=\log_2 x+ax+b$ 在 $[t,t+1](t>0)$ 上单调递增.因为 $f(x)=|\log_2 x+ax+b|$ 在区间 $[t,t+1](t>0)$ 上的最大值为 $M_t(a,b)$,所以 $M_t(a,b)=f(t)$ 或 $M_t(a,b)=f(t+1)$.由题意可知 $f(t)\geqslant\frac{a}{2}+1$ 或 $f(t+1)\geqslant\frac{a}{2}+1$,则只需 $-(\log_2 t+at+b)\geqslant\frac{a}{2}+1$ 或 $\log_2(t+1)+a(t+1)+b\geqslant\frac{a}{2}+1$,整理得 $b\leqslant-\log_2 t-at-\frac{a}{2}-1$ 或 $b\geqslant-\log_2(t+1)-at-\frac{a}{2}+1$,即关于 $b$ 的不等式 $b\leqslant-\log_2 t-at-\frac{a}{2}-1$ 或 $b\geqslant-\log_2(t+1)-at-\frac{a}{2}+1$ 的解集为 $\mathbf{R}$,可知 $-\log_2(t+1)-at-\frac{a}{2}+1\leqslant-\log_2 t-at-\frac{a}{2}-1$,整理得 $\log_2(t+1)-\log_2 t=\log_2\left(1+\frac{1}{t}\right)\geqslant 2$,则 $1+\frac{1}{t}\geqslant 4$,又因为 $t>0$,所以 $0<t\leqslant\frac{1}{3}$,所以 $t$ 的最大值为 $\frac{1}{3}$.

## 小题 12 "8+3+3"73 分练

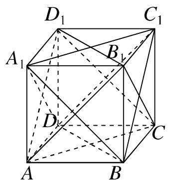
1. A 【解析】由 $3^x<9$ 解得 $x<2$,所以 $A=(1,2)$,$B=(-\infty,2)$,所以 $A\subseteq B$,$A\cup B=B$.故选 A.

2. B 【解析】以点 $A$ 为坐标原点建立平面直角坐标系,如图所示,由 $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{PC}$ 可得 $P$ 为 $BC$ 的中点,所以 $P(2,1)$,




易知 $A(0,0)$,$D(0,2)$,$B(2,0)$,可得 $\overrightarrow{AP}=(2,1)$,$\overrightarrow{BD}=(-2,2)$,所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BD}=2\times(-2)+1\times2=-2$.故选 B.

3. A 【解析】如图,从 8 个顶点中任取 3 个连接构成三角形包含的样本点有 $C_8^3=56$(个),其中能构成正三角形包含的样本点



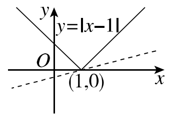

有 $\triangle ACD_1$,$\triangle BDC_1$,$\triangle ACB_1$,$\triangle BDA_1$,$\triangle A_1C_1B$,$\triangle B_1D_1A$,$\triangle B_1D_1C$,$\triangle A_1C_1D$,共 8 个,故所求概率为 $\frac{8}{56}=\frac{1}{7}$,故选 A.

4. A 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q$,$q>0$,因为 $-a_3,a_2,a_4$ 成等差数列,所以 $2a_2=-a_3+a_4$,所以 $2q=-q^2+q^3$,解得 $q=2$(负值舍去),所以 $S_{2024}=\frac{a_1(1-q^{2024})}{1-q}=2^{2024}-1$,$a_{2024}=a_1q^{2023}=2^{2023}$,则 $S_{2024}=2a_{2024}-1$.故选 A.

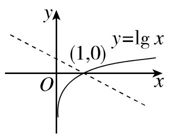
5. C 【解析】梯形 $ABCD$ 旋转一周形成圆台,且圆台的上底面半径 $r_1=1$,下底面半径 $r_2=3$,由圆 $O$ 和梯形 $ABCD$ 相切可得,$AD=r_1+r_2=1+3=4$,所以圆台的高 $h=\sqrt{AD^2-(r_2-r_1)^2}=2\sqrt{3}$.圆 $O$ 旋转一周形成球,则球的半径 $r=\frac{h}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$,所以圆台的体积 $V_1=\frac{\pi}{3}h(r_1^2+r_2^2+r_1\cdot r_2)=\frac{26\sqrt{3}\pi}{3}$,球的体积 $V_2=\frac{4\pi}{3}r^3=4\sqrt{3}\pi$,所以 $\frac{V_1}{V_2}=\frac{13}{6}$.故选 C.

6. D 【解析】根据题意,若函数 $f(x)$ 具有性质 $P_1$,则 $f(x)$ 的图象在过点 $(1,f(1))$ 的直线的上方,且这样的直线只有一条.

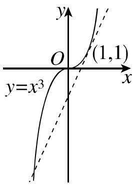
对于A,$f(x)=|x-1|$的图象,以及过点(1,0)的直线,如图①所示,数形结合可知,过点(1,0)的直线有无数条都满足题意,故A错误;对于B,$f(x)=\lg x$的图象,以及过点(1,0)的直线,如图②所示,数形结合可知,不存在过点(1,0)的直线,使得$f(x)$的图象在该直线的上方,故B错误;对于C,$f(x)=x^3$的图象,以及过点(1,1)的直线,如图③所示,数形结合可知,不存在过点(1,1)的直线,使得$f(x)$的图象在该直线的上方,故C错误;对于D,$f(x)=-\sin\frac{\pi}{2}x$的图象,以及过点(1,-1)的直线,如图④所示,数形结合可知,存在唯一的一条过点(1,-1)的直线$y=-1$,即$k=0$,满足题意,故D正确.故选D.



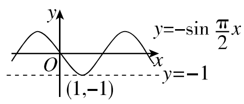
①



②

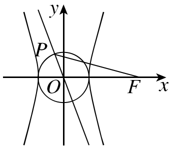


③



④

7. C 【解析】如图,由题意知,双曲线的一条渐近线方程为$y=-\frac{b}{a}x$,

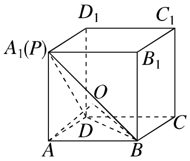



则由$\begin{cases}y=-\frac{b}{a}x,\\x^2+y^2=a^2,\end{cases}$解得$\begin{cases}x^2=\frac{a^4}{c^2},\\y^2=\frac{a^2b^2}{c^2},\end{cases}$所以$P\left(-\frac{a^2}{c},\frac{ab}{c}\right)$,由三角函数的定义知$\sin\angle POF=\frac{b}{c}$,$\cos\angle POF=-\frac{a}{c}$,又$\tan\angle FPO=\sqrt{2}$,且显然$\angle FPO$为锐角,$\sin^2\angle FPO+\cos^2\angle FPO=1$,所以$\cos\angle FPO=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\sin\angle FPO=\frac{\sqrt{6}}{3}$,则$\sin\angle PFO=\sin(\angle OPF+\angle POF)=\frac{\sqrt{6}}{3}\times\left(-\frac{a}{c}\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{3}b-\sqrt{6}a}{3c}$.在△POF中,由正弦定理可得$\frac{|OP|}{\sin\angle PFO}=\frac{|OF|}{\sin\angle OPF}$,即$\frac{a}{\frac{\sqrt{3}b-\sqrt{6}a}{3c}}=\frac{c}{\frac{\sqrt{6}}{3}}$,化简得$\frac{b}{a}=2\sqrt{2}$,所以C的离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=3$.故选C.

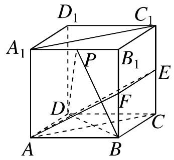
8. C 【解析】因为$f(x)=e^{kx}+1$,所以$kf(x)=k(e^{kx}+1)$,由$kf(x)\geqslant g(x)$得$k(e^{kx}+1)\geqslant\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x(x>0)$,即$kx(e^{kx}+1)\geqslant(1+x)\ln x(x>0)$,即$\ln e^{kx}\cdot(e^{kx}+1)\geqslant(1+x)\ln x(x>0)$,构造函数$h(x)=(1+x)\ln x(x>0)$,则$\ln e^{kx}\cdot(e^{kx}+1)\geqslant(1+x)\ln x(x>0)$可化为$h(e^{kx})\geqslant h(x)(x>0)$.$h'(x)=\ln x+\frac{1}{x}+1(x>0)$,令$t(x)=\ln x+\frac{1}{x}+1(x>0)$,则$t'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}(x>0)$,令$t'(x)=0$,解得$x=1$,所以当$x\in(0,1)$时,$t'(x)<0$,$t(x)$在(0,1)上单调递减,当$x\in(1,+\infty)$时,$t'(x)>0$,$t(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增,所以当$x=1$时,$t(x)$取得最小值,即$t(x)_{\min}=t(1)=2>0$,所以$t(x)>0$在$(0,+\infty)$上恒成立,即$h'(x)>0$在$(0,+\infty)$上恒成立,所以$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.因为$h(e^{kx})\geqslant h(x)(x>0)$,所以$e^{kx}\geqslant x(x>0)$,即$kx\geqslant\ln x(x>0)$,所以$k\geqslant\frac{\ln x}{x}(x>0)$,令$m(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$,则$m'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}(x>0)$,令$m'(x)=0$,即$1-\ln x=0$,解得$x=e$,所以当$x\in(0,e)$时,$m'(x)>0$,$m(x)$在$(0,e)$上单调递增,当$x\in(e,+\infty)$时,$m'(x)<0$,$m(x)$在$(e,+\infty)$上单调递减,所以当$x=e$时,$m(x)$取得最大值,即$m(x)_{\max}=m(e)=\frac{1}{e}$,所以$m(x)\leqslant\frac{1}{e}$,所以$k\geqslant\frac{1}{e}$.故选C.

9. ACD 【解析】对于A,$z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$,则$\overline{z}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$,所以$|\overline{z}|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=1$,故A正确;对于B,$z\cdot\overline{z}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}i\right)^2=1$,$z^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^2=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}i^2+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}i=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,所以$z\cdot\overline{z}\neq z^2$,故B错误;对于C,$z^3=z^2\cdot z=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=i$,故C正确;对于D,$z^{2024}=z^2\cdot z^{2022}=z^2\cdot(z^3)^{674}=z^2\cdot i^{674}=z^2\cdot(i^2)^{337}=-z^2$,所以$z^2+z^{2024}=0$,故D正确.故选ACD.

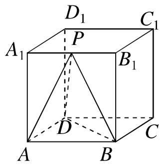
10. ABD 【解析】如图①,当$\lambda=0$时,$P$与$A_1$重合,则三棱锥$A\text{-}PBD$为正三棱锥,$BD=3\sqrt{2}$,设$A$在平面$PBD$内的射影为$O$,则$O$为$\triangle PBD$的中心,连接$OA$,$OB$,则$OB=\frac{2}{3}\sqrt{(3\sqrt{2})^2-\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{6}$,所以$AO=\sqrt{3^2-(\sqrt{6})^2}=\sqrt{3}$,即当$\lambda=0$时,点$A$到平面$PBD$的距离为$\sqrt{3}$,故A正确;如图②,连接$AC$,$A_1C_1$,由正方体的性质可得$BD\perp$平面$ACC_1A_1$,因为$AE\subset$平面$ACC_1A_1$,所以$BD\perp AE$,设$F$为$BB_1$的中点,连接$EF$,$AF$,则$EF\perp$平面$ABB_1A_1$,因为$BP\subset$平面$ABB_1A_1$,所以$EF\perp BP$,当$\lambda=\frac{1}{2}$时,$P$为$A_1B_1$的中点,则$\triangle ABF\cong\triangle BB_1P$,所以$\angle FAB=\angle PBB_1$,又$\angle ABP+\angle PBB_1=\frac{\pi}{2}$,所以$\angle ABP+\angle FAB=\frac{\pi}{2}$,所以$AF\perp BP$,又$AF\cap EF=F$,$AF,EF\subset$平面$AEF$,所以$BP\perp$平面$AEF$,又$AE\subset$平面$AEF$,所以$BP\perp AE$,又$BD\cap BP=B$,$BD,BP\subset$平面$PBD$,所以$AE\perp$平面$PBD$,故B正确;如图③,当$P$运动时,$P$到平面$ABD$的距离保持不变为3,又$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}$,所以$V_{A\text{-}PBD}=V_{P\text{-}ABD}=\frac{1}{3}\times3\times\frac{9}{2}=\frac{9}{2}$,所以三棱锥$A\text{-}PBD$的体积为定值,故C错误;由C可知,三棱锥$A\text{-}PBD$的体积为定值,设点$A$到平面$PBD$的距离为$d$,$AB$与平面$PBD$所成的角为$\theta$,则$d=\frac{3V_{A\text{-}PBD}}{S_{\triangle PBD}}=\frac{27}{2S_{\triangle PBD}}$,显然当$\lambda=0$时,$\triangle PBD$的面积最大为$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(3\sqrt{2})^2=\frac{9\sqrt{3}}{2}$,则$d_{\min}=\frac{27}{2\times\frac{9\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}$,此时$AB$与平面$PBD$所成角的正弦值为$\sin\theta=\frac{d}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,当$\lambda=1$时,$\triangle PBD$的面积最小为$\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times3=\frac{9\sqrt{2}}{2}$,则$d_{\max}=\frac{27}{2\times\frac{9\sqrt{2}}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,此时$AB$与平面$PBD$所成角的正弦值为$\sin\theta=\frac{d}{AB}=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以$AB$与平面$PBD$所成角的正弦值的取值范围是$\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$,故D正确.故选ABD.



①



②



③

**11.** BC 【解析】根据题意,小郡前进 1 步的概率和前进 2 步的概率都是$\frac{1}{2}$,所以 $p_1=\frac{1}{2}$,$p_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$,故选项 A 错误.当 $n\geqslant3$ 时,前进几步是由两部分组成的,即先前进 $n-1$ 步,再前进 1 步,其概率为$\frac{1}{2}p_{n-1}$,或者先前进 $n-2$ 步,再前进 2 步,其概率为$\frac{1}{2}p_{n-2}$,所以 $p_n=\frac{1}{2}p_{n-1}+\frac{1}{2}p_{n-2}(n\geqslant3)$,故选项 B 正确.因为 $p_n=\frac{1}{2}p_{n-1}+\frac{1}{2}p_{n-2}$ $(n\geqslant3)$,所以 $2p_n+p_{n-1}=2p_{n-1}+p_{n-2}$ $(n\geqslant3)$,而 $2p_2+p_1=2\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=2$,所以 $2p_n+p_{n-1}=2(n\geqslant2)$,即 $p_n=1-\frac{1}{2}p_{n-1}(n\geqslant2)$,故选项 C 正确.因为当 $n\geqslant2$ 时,$p_n=1-\frac{1}{2}p_{n-1}$,所以 $p_n-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\left(p_{n-1}-\frac{2}{3}\right)$,又 $p_1-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}$,所以数列$\left\{p_n-\frac{2}{3}\right\}$是首项为$-\frac{1}{6}$,公比为$-\frac{1}{2}$的等比数列,所以 $p_n-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,所以 $p_n=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.当 $n$ 为奇数时,$n-1$ 为偶数,则 $p_n=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,此时数列$\{p_n\}$是递增数列,所以 $p_n<\frac{2}{3}$;当 $n$ 为偶数时,$n-1$ 为奇数,则 $p_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,此时数列$\{p_n\}$是递减数列,所以 $p_n\leqslant p_2=\frac{3}{4}$.综上,当 $n=2$ 时,概率最大,即小郡一共前进 2 步的概率最大,故选项 D 错误.故选 BC.

**12.** $-\frac{3}{5}$ 【解析】$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{2}\right]=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{3}{5}$.

**13.** 17 【解析】令 $x=1$,得 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9=-1$,又$(1-2x)^9$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_9^r(-2x)^r=\mathrm{C}_9^r(-2)^r x^r(0\leqslant r\leqslant9$ 且 $r\in\mathbf{N})$,所以 $a_1=(-2)^1\times\mathrm{C}_9^1=-18$,所以 $a_0+\sum_{i=2}^{9}a_i=-1-(-18)=17$.

**14.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 【解析】连接 $F_2M$,设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,因为 $F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$,所以由 $F_1M/\!/F_2N$,$|F_1M|=2|F_2N|$,即 $\overrightarrow{F_1M}=2\overrightarrow{F_2N}$,得$\begin{cases}x_1+c=2(x_2-c),\\y_1=2y_2,\end{cases}$即$\begin{cases}x_1=2x_2-3c,\\y_1=2y_2\end{cases}$①,又 $\overrightarrow{F_1N}\cdot\overrightarrow{MN}+\frac{a^2}{9}=|F_1F_2|^2$,所以$(x_2+c)(x_2-x_1)+y_2(y_2-y_1)+\frac{a^2}{9}=4c^2$,将①式代入得,$(x_2+c)(3c-x_2)-y_2^2+\frac{a^2}{9}=4c^2$,即$(x_2+c)(x_2-3c)+y_2^2+4c^2=\frac{a^2}{9}$,配方整理得$(x_2-c)^2+y_2^2=\frac{a^2}{9}$,所以$|F_2N|^2=\frac{a^2}{9}$,即$|F_2N|=\frac{a}{3}$,则$|F_1M|=\frac{2a}{3}$,又由$|F_1N|+|F_2N|=2a$,$|F_1M|+|F_2M|=2a$,得$|F_1N|=\frac{5a}{3}$,$|F_2M|=\frac{4a}{3}$.因为 $F_1M/\!/F_2N$,所以$\angle MF_1F_2+\angle NF_2F_1=\pi$,所以$\cos\angle MF_1F_2+\cos\angle NF_2F_1=0$.根据余弦定理,得 $\cos\angle MF_1F_2=\frac{|MF_1|^2+|F_1F_2|^2-|MF_2|^2}{2|MF_1|\cdot|F_1F_2|}=\frac{\frac{4}{9}a^2+4c^2-\frac{16}{9}a^2}{2\times\frac{2}{3}a\times2c}=\frac{3c^2-a^2}{2ac}$,

$\cos\angle NF_2F_1=\frac{|NF_2|^2+|F_1F_2|^2-|NF_1|^2}{2|NF_2|\cdot|F_1F_2|}=\frac{\frac{1}{9}a^2+4c^2-\frac{25}{9}a^2}{2\times\frac{1}{3}a\times2c}=\frac{6c^2-4a^2}{2ac}$,所以$\frac{3c^2-a^2}{2ac}+\frac{6c^2-4a^2}{2ac}=0$,解得 $9c^2=5a^2$,所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

## 考卷Ⅱ 解答·标准练

### 解答 1 “15~17 题”43 分练

**15. 解:**(1)因为 $a^2\cos B+ab\cos A=2c$,所以 $a(a\cos B+b\cos A)=2c$, …… 1 分

由正弦定理得 $a(\sin A\cos B+\sin B\cos A)=2\sin C$,………… 2 分

所以 $a\sin(A+B)=2\sin C$. …… 3 分

因为 $A+B=\pi-C$,所以 $\sin(A+B)=\sin C$,……………… 4 分

故 $a\sin C=2\sin C$,

又 $\sin C>0$,所以 $a=2$. ………… 6 分

(2)由(1)及已知,有 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+c^2-4}{2bc}=-\frac{1}{2}$, ……………… 7 分

可得 $b^2+c^2+bc=4$,…………… 8 分

又 $a+b+c=2+\sqrt{5}$,所以 $b+c=\sqrt{5}$,……………… 9 分

所以$(b+c)^2-bc=5-bc=4$,得 $bc=1$,……………… 11 分

故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}$. …… 13 分

**16. 解:**(1)由题可得,甲赢得比赛有以下三种情况:

前三局甲获胜,概率为 $P_1=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$;……………… 2 分

比赛四局,甲前三局中胜两局负一局,第四局甲胜,概率为 $P_2=\mathrm{C}_3^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$; ……… 3 分

比赛五局,甲前四局中胜两局负两局,第五局甲胜,概率为 $P_3=\mathrm{C}_4^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{16}{81}$. …… 5 分

所以甲赢得比赛的概率 $P=\frac{8}{27}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}=\frac{64}{81}$. ……………… 7 分

(2)设两人的比赛局数为 $X$,则随机变量 $X$ 的可能取值为 3,4,5, …… 9 分

则 $P(X=3)=\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{3}$,……………… 10 分

$P(X=4)=\mathrm{C}_3^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\mathrm{C}_3^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{10}{27}$, … 11 分

$P(X=5)=1-P(X=4)-P(X=3)=1-\frac{1}{3}-\frac{10}{27}=\frac{8}{27}$,……… 12 分

则 $E(X)=3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{10}{27}+5\times\frac{8}{27}=\frac{107}{27}$. ……………… 15 分

**17. 解:**(1)证明:如图①,取 $AA_1$ 的中点 $M$,连接 $MP$,$MB$.

在四棱台 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中,四边形 $A_1ADD_1$ 是梯形,$A_1D_1=2$,$AD=4$,又点 $M$,$P$ 分别是棱 $A_1A$,$D_1D$ 的中点,

所以 $MP/\!/AD$,且 $MP=\frac{A_1D_1+AD}{2}=3$. ……………… 2 分

在正方形 $ABCD$ 中,$BC/\!/AD$,$BC=4$,又 $BQ=3QC$,所以 $BQ=3$,

可得 $MP/\!/BQ$ 且 $MP=BQ$,所以四边形 $BMPQ$ 是平行四边形,所以 $PQ/\!/MB$. ……………… 4 分

因为 $MB\subset$ 平面 $ABB_1A_1$，$PQ\not\subset$ 平面 $ABB_1A_1$，所以 $PQ//$ 平面 $ABB_1A_1$. …………………… 6 分

(2)方法一：在平面 $AA_1D_1D$ 中，过 $A_1$ 作 $A_1O\perp AD$ 于 $O$.

因为平面 $AA_1D_1D\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $AA_1D_1D\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$A_1O\perp AD$，$A_1O\subset$ 平面 $AA_1D_1D$，所以 $A_1O\perp$ 平面 $ABCD$. …………………… 7 分

在正方形 $ABCD$ 中，过 $O$ 作 $AB$ 的平行线交 $BC$ 于点 $N$，则 $ON\perp OD$.

以 $O$ 为原点，$ON,OD,OA_1$ 所在直线分别为 $x,y,z$ 轴，建立如图②所示的空间直角坐标系.

因为四边形 $AA_1D_1D$ 是等腰梯形，$A_1D_1=2,AD=4$，所以 $AO=1$，

又 $A_1A=D_1D=\sqrt{17}$，所以 $A_1O=4$.

易得 $B(4,-1,0),D(0,3,0),C(4,3,0)$，$D_1(0,2,4)$，则 $P\left(0,\frac{5}{2},2\right)$，所以 $\overrightarrow{DC}=(4,0,0),\overrightarrow{DP}=\left(0,-\frac{1}{2},2\right),\overrightarrow{CB}=(0,-4,0)$. …………………… 9 分

设 $\overrightarrow{CQ}=\lambda\overrightarrow{CB}=(0,-4\lambda,0)(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，

则 $\overrightarrow{DQ}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CQ}=(4,-4\lambda,0)$.

设平面 $PDQ$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DP}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DQ}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-\frac{1}{2}y+2z=0,\\ 4x-4\lambda y=0,\end{cases}$

令 $z=1$，得 $\boldsymbol{m}=(4\lambda,4,1)$， …… 11 分

易知平面 $DCQ$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$. …………………… 12 分

设二面角 $P$-$QD$-$C$ 的平面角为 $\theta$，由题意得 $|\cos\theta|=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\frac{1}{\sqrt{26}}$.

又 $|\cos\theta|=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{(4\lambda)^2+17}}$，

所以 $\frac{1}{\sqrt{(4\lambda)^2+17}}=\frac{1}{\sqrt{26}}$，解得 $\lambda=\frac{3}{4}$ 或 $\lambda=-\frac{3}{4}$(舍)，此时 $CQ=\frac{3}{4}\times4=3$，$BQ=1$. …………………… 14 分

所以当二面角 $P$-$QD$-$C$ 的正弦值为 $\frac{5\sqrt{26}}{26}$ 时，线段 $BQ$ 的长为 1. … 15 分

方法二：在平面 $AA_1D_1D$ 中，过 $A_1$ 作 $A_1O\perp AD$ 于 $O$.

因为平面 $AA_1D_1D\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $AA_1D_1D\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$A_1O\perp AD$，$A_1O\subset$ 平面 $AA_1D_1D$，所以 $A_1O\perp$ 平面 $ABCD$. …………………… 7 分

在正方形 $ABCD$ 中，过 $O$ 作 $AB$ 的平行线交 $BC$ 于点 $N$，则 $ON\perp OD$.

以 $O$ 为原点，$ON,OD,OA_1$ 所在直线分别为 $x,y,z$ 轴，建立如图②所示的空间直角坐标系.

因为四边形 $AA_1D_1D$ 是等腰梯形，$A_1D_1=2,AD=4$，所以 $AO=1$，

又 $A_1A=D_1D=\sqrt{17}$，所以 $A_1O=4$.

易得 $D(0,3,0),D_1(0,2,4)$，则 $P\left(0,\frac{5}{2},2\right)$，

所以 $\overrightarrow{DP}=\left(0,-\frac{1}{2},2\right)$. ……… 9 分

设 $Q(4,t,0)(-1\leqslant t\leqslant3)$，则 $\overrightarrow{DQ}=(4,t-3,0)$.

设平面 $PDQ$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DP}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DQ}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-\frac{1}{2}y+2z=0,\\ 4x+(t-3)y=0,\end{cases}$

令 $z=1$，得 $\boldsymbol{m}=(3-t,4,1)$， … 11 分

易知平面 $DCQ$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$. …………………… 12 分

设二面角 $P$-$QD$-$C$ 的平面角为 $\theta$，由题意得 $|\cos\theta|=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\frac{1}{\sqrt{26}}$.

又 $|\cos\theta|=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{(3-t)^2+17}}$，

所以 $\frac{1}{\sqrt{(3-t)^2+17}}=\frac{1}{\sqrt{26}}$，解得 $t=0$ 或 $t=6$(舍)，此时 $BQ=1$. …… 14 分

所以当二面角 $P$-$QD$-$C$ 的正弦值为 $\frac{5\sqrt{26}}{26}$ 时，线段 $BQ$ 的长为 1. … 15 分

方法三：如图③，在平面 $A_1ADD_1$ 中，过 $P$ 作 $PH\perp AD$，垂足为 $H$.

因为平面 $A_1ADD_1\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $A_1ADD_1\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$PH\perp AD$，$PH\subset$ 平面 $A_1ADD_1$，所以 $PH\perp$ 平面 $ABCD$，又 $DQ\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PH\perp DQ$. …………………… 7 分

在平面 $ABCD$ 中，过 $H$ 作 $HG\perp DQ$，垂足为 $G$，连接 $PG$.

因为 $PH\perp DQ,HG\perp DQ,PH\cap HG=H,PH,HG\subset$ 平面 $PHG$，

所以 $DQ\perp$ 平面 $PHG$，又 $PG\subset$ 平面 $PHG$，所以 $DQ\perp PG$.

因为 $HG\perp DQ,PG\perp DQ$，

所以 $\angle PGH$ 是二面角 $P$-$QD$-$A$ 的平面角. …………………… 9 分

在四棱台 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，四边形 $A_1ADD_1$ 是梯形，$A_1D_1=2,AD=4$，$A_1A=D_1D=\sqrt{17}$，点 $P$ 是棱 $DD_1$ 的中点，

所以 $PH=2,DH=\frac{1}{2}$. ……… 10 分

设 $BQ=x(0\leqslant x\leqslant4)$，

则 $CQ=4-x,DQ=\sqrt{4^2+(4-x)^2}=\sqrt{x^2-8x+32}$，

连接 $QH$，在 $\triangle QHD$ 中，$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times4=\frac{1}{2}\times\sqrt{x^2-8x+32}\times HG$，从而 $HG=\frac{2}{\sqrt{x^2-8x+32}}$. …………………… 12 分

因为二面角 $P$-$QD$-$C$ 的平面角与二面角 $P$-$QD$-$A$ 的平面角互补，

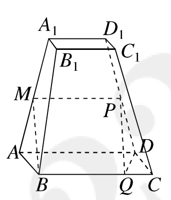
且二面角 $P$-$QD$-$C$ 的正弦值为 $\frac{5\sqrt{26}}{26}$，

所以 $\sin\angle PGH=\frac{5\sqrt{26}}{26}$，

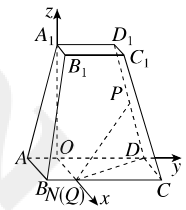
从而 $\tan\angle PGH=5$.

所以在 Rt$\triangle PHG$ 中，$\frac{PH}{HG}=\sqrt{x^2-8x+32}=5$，解得 $x=1$ 或 $x=7$(舍). …………………… 14 分

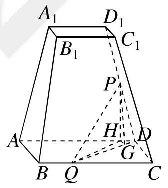
所以当二面角 $P$-$QD$-$C$ 的正弦值为 $\frac{5\sqrt{26}}{26}$ 时，线段 $BQ$ 的长为 1. … 15 分




①




②




③

## 解答 2 “15～17 题”43 分练

**15. 解：**(1)因为 $a^2+b^2+\sqrt{2}ab=c^2$，

所以 $a^2+b^2-c^2=-\sqrt{2}ab$，

则 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{-\sqrt{2}ab}{2ab}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$， …………………… 3 分

又 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{3\pi}{4}$. …… 5 分

(2)方法一：根据正弦定理，

由 $c=2b\cos B$，得 $\sin C=2\sin B\cos B=\sin 2B$， …………………… 7 分

所以 $C=2B$ 或 $C+2B=\pi$. …… 8 分

当 $C=2B$ 时，$C=\frac{3\pi}{4},B=\frac{3\pi}{8}$，此时 $B+C>\pi$，不符合题意； …………… 9 分

当 $C+2B=\pi$ 时，$A=B=\frac{\pi}{8}$，则 $a=b=1$， …………………… 11 分

故 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$. …………… 13 分

方法二：根据正弦定理，由 $c=2b\cos B$，得 $\sin C=2\sin B\cos B=\sin 2B$， …………………… 7 分

所以 $\sin C=\sin 2B=\frac{\sqrt{2}}{2}$， ……… 8 分

因为 $C=\frac{3\pi}{4}$，所以 $B\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，

则 $2B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $2B=\frac{\pi}{4}$，得 $B=$

$\frac{\pi}{8}$,………………………… 9分

则 $A=\pi-\frac{\pi}{8}-\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$，得 $a=b=1$，

………………………… 11分

所以$\triangle ABC$的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$. ………… 13分

16. **解**：(1)函数 $f(x)=\cos x+x\sin x$，$x\in(-\pi,\pi)$，求导得 $f'(x)=-\sin x+\sin x+x\cos x=x\cos x$. ……… 2分

当 $-\pi<x<-\frac{\pi}{2}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；当 $-\frac{\pi}{2}<x<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；当 $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减.

所以 $f(x)$的单调递增区间为 $\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$，$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，单调递减区间为 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$. ………… 4分

$f(x)$的极小值为 $f(0)=1$. …… 5分

(2)证明：当 $x\in[0,\pi)$ 时，令 $F(x)=e^x+e^{-x}-2(\cos x+x\sin x)$，…… 6分

求导得 $F'(x)=e^x-e^{-x}-2x\cos x\geqslant e^x-e^{-x}-2x$. ……… 9分

令 $\varphi(x)=e^x-e^{-x}-2x$，求导得 $\varphi'(x)=e^x+e^{-x}-2\geqslant2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}-2=0$(当且仅当 $x=0$ 时取等号)，

………………………… 12分

所以函数 $\varphi(x)$在$[0,\pi)$上单调递增，则 $\varphi(x)\geqslant\varphi(0)=0$，……………… 13分

所以 $F'(x)\geqslant0$，则 $F(x)$在$[0,\pi)$上单调递增，………………… 14分

因此 $F(x)\geqslant F(0)=0$，

所以 $2f(x)\leqslant e^x+e^{-x}$. ………… 15分

17. **解**：(1)由题知 $X\sim B\left(8,\frac{1}{4}\right)$，

则 $E(X)=8\times\frac{1}{4}=2$. ………… 4分

因为每道题答对得5分，不答或答错得0分，所以此人的得分为$5X$，故此人得分的数学期望为 $E(5X)=5E(X)=5\times2=10$. ………………………… 6分

(2)由题知此人答对$k$道题的概率为 $P(X=k)=C_8^k\left(\frac{1}{4}\right)^k\times\left(\frac{3}{4}\right)^{8-k}$，$k=0,1,2,\cdots,8$，

记 $p_k=P(X=k)$，………………… 8分

则 $\frac{p_k}{p_{k-1}}=\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)}=\frac{C_8^k\left(\frac{1}{4}\right)^k\times\left(\frac{3}{4}\right)^{8-k}}{C_8^{k-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{9-k}}=$

$\frac{\frac{8!}{k!(8-k)!}\times\frac{1}{4}}{\frac{8!}{(k-1)!(9-k)!}\times\frac{3}{4}}=\frac{9-k}{3k}=1+\frac{9-4k}{3k}$，$k=1,2,\cdots,8$. ……… 12分

当 $k=1,2$ 时，$p_k>p_{k-1}$，即 $p_2>p_1>p_0$；………………………… 13分

当 $k=3,4,5,6,7,8$ 时，$p_k<p_{k-1}$，

即 $p_8<p_7<\cdots<p_2$. ……………… 14分

所以 $p_2$ 最大，所以此人答对2道题的概率最大. ………………… 15分

**解答3 “15～17题”43分练**

15. **解**：(1)因为 $\sin^2A+\sin^2B+\sin A\sin B=\sin^2C$，所以由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 可得 $a^2+b^2+ab=c^2$. …… 2分

由余弦定理可得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-(a^2+b^2+ab)}{2ab}=-\frac{1}{2}$.

………………………… 5分

又因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{2\pi}{3}$.

………………………… 6分

(2)由 $a,b,c$ 成等差数列，可得 $a+c=2b$①，………………… 7分

因为$\triangle ABC$的面积为$\frac{15\sqrt{3}}{4}$，$C=\frac{2\pi}{3}$，所以$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{15\sqrt{3}}{4}$，即 $ab=15$②，

………………………… 9分

由(1)知 $a^2+b^2+ab=c^2$③，由①②③解得 $a=3,b=5,c=7$. ……… 12分

所以 $a+b+c=15$，

故$\triangle ABC$的周长为15. ……… 13分

16. **解**：(1)设$C$的半焦距为$c$，则$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

………………………… 1分

故 $b^2=a^2-c^2=\frac{2a^2}{3}$. ……………… 3分

将$\left(1,-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$代入$C$的方程，有$\frac{1}{a^2}+\frac{4}{3b^2}=1$，故$\frac{3}{a^2}=1$，

则 $a^2=3,b^2=2$，………………… 6分

所以$C$的方程为$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$. … 7分

(2)由(1)可知$C$的左焦点为$(-1,0)$，

………………………… 8分

故过左焦点且斜率为$\sqrt{2}$的直线为 $l$：$y=\sqrt{2}x+\sqrt{2}$. ……………… 9分

将 $l$ 与 $C$ 的方程联立得 $\begin{cases}\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1,\\ y=\sqrt{2}x+\sqrt{2},\end{cases}$ 消去 $y$ 得 $2x^2+3x=0$.

………………………… 10分

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

则不妨令 $x_1=0$，$x_2=-\frac{3}{2}$，… 11分

故 $|MN|=\sqrt{3}|x_1-x_2|=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

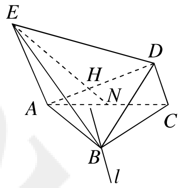
………………………… 12分

且$P$到$l$的距离 $d=\frac{\left|\sqrt{2}+\frac{2\sqrt{3}}{3}+\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2+1}}=\frac{2\sqrt{6}+2}{3}$，………………… 13分

所以$\triangle PMN$的面积为$\frac{|MN|\cdot d}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{6}+2}{3}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$.

………………………… 15分

17. **解**：(1)证明：如图，过点$B$作$CD$的平行线，即为$l$. 理由如下：$\because AE/\!/CD$，$AE\subset$平面$AEB$，$CD\not\subset$平面$AEB$，$\therefore CD/\!/$平面$AEB$.




又$\because CD\subset$平面$BCD$，且平面$ABE\cap$平面$BCD=l$，$\therefore l/\!/CD$.

又$\because AB\perp l$，$\therefore AB\perp CD$. ……… 4分

又$\because B$在以$AC$为直径的圆上运动，$\therefore AB\perp BC$.

又$\because BC\cap CD=C$，$BC,CD\subset$平面$BCD$，$\therefore AB\perp$平面$BCD$，$\because BD\subset$平面$BCD$，$\therefore AB\perp BD$. ……………… 6分

(2)在$\triangle ACD$中，$AC=2CD=2$，$\angle ACD=60°$，由余弦定理可得 $DA=\sqrt{3}$，$\therefore DA^2+DC^2=AC^2$，$\therefore\angle ADC=90°$，故 $CD\perp DA$.

由(1)知 $AB\perp CD$，$AB\cap DA=A$，$AB$，$DA\subset$平面$ABD$，$\therefore CD\perp$平面$ABD$，

又$\because AE/\!/CD$，$\therefore AE\perp$平面$ABD$.

………………………… 9分

令 $EN\cap AD=H$，则$\angle EHA$即为直线$EN$与平面$ABD$所成的角. … 11分

$\because\angle EHA=\frac{\pi}{2}-\angle AEH$，

$\therefore\sin\angle EHA=\cos\angle AEH$.

在$\triangle AEN$中，$EN^2=1^2+2^2-2\times1\times2\times\cos120°=7$，……………… 13分

$\therefore\cos\angle AEH=\cos\angle AEN=\frac{AE^2+EN^2-AN^2}{2AE\cdot EN}=\frac{4+7-1}{2\times2\times\sqrt{7}}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$，

即直线$EN$与平面$ABD$所成角的正弦值为$\frac{5\sqrt{7}}{14}$. ………………… 15分

**解答4 “15～17题”43分练**

15. **解**：(1)零假设为 $H_0$：该校学生选择乒乓球还是羽毛球与性别无关联.

$\chi^2=\frac{150\times(50\times40-25\times35)^2}{75\times75\times85\times65}=\frac{1350}{221}\approx6.109>3.841=x_{0.05}$，………… 4分

依据小概率值$\alpha=0.05$的独立性检验，推断$H_0$不成立，即认为该校学生选择乒乓球还是羽毛球与性别有关联，此推断犯错误的概率不大于0.05. … 6分

(2)女生中乒乓球组与羽毛球组抽取的

人数比例为 35∶40=7∶8,故抽取的15人中,乒乓球组的有 $15\times\frac{7}{7+8}=7$(人),

羽毛球组的有 $15\times\frac{8}{7+8}=8$(人), …………………………………… 7分

故 $X$ 的可能取值为 $0,1,2$, …… 8分

$P(X=0)=\frac{C_8^2}{C_{15}^2}=\frac{4}{15}$, …………… 9分

$P(X=1)=\frac{C_7^1C_8^1}{C_{15}^2}=\frac{8}{15}$, ……… 10分

$P(X=2)=\frac{C_7^2}{C_{15}^2}=\frac{1}{5}$, ………… 11分

故 $X$ 的分布列为

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{4}{15}$ | $\frac{8}{15}$ | $\frac{1}{5}$ |

$E(X)=0\times\frac{4}{15}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{5}=\frac{14}{15}$.

…………………………………… 13分

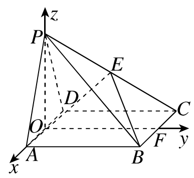
**16. 解:**(1)证明:由题意得 $AB=BC=CD=DA=AP=PD=2$,

又 $PC=PB=2\sqrt{2}$,所以 $PD^2+CD^2=PC^2$,$AP^2+AB^2=PB^2$, ……… 2分

所以 $DC\perp PD$,$AB\perp AP$. ……… 3分

因为底面 $ABCD$ 为菱形,所以 $AB/\!/CD$,故 $DC\perp AP$,又 $AP\subset$ 平面 $PAD$,$DP\subset$ 平面 $PAD$,$AP\cap DP=P$,所以 $DC\perp$ 平面 $PAD$. ……………………… 5分

又 $DC\subset$ 平面 $ABCD$,所以平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$. ……………………… 6分




(2)由(1)知 $DC\perp$ 平面 $PAD$,而 $AD\subset$ 平面 $PAD$,所以 $DC\perp DA$,故底面 $ABCD$ 为正方形. …… 7分

设 $DA$ 的中点为 $O$,连接 $OP$,在平面 $ABCD$ 内作 $OF/\!/DC$ 交 $BC$ 于 $F$,因为 $\triangle PAD$ 为等边三角形,所以 $PO\perp AD$,故 $PO\perp$ 平面 $ABCD$.

如图,以 $O$ 为坐标原点,分别以 $OA$,$OF$,$OP$ 所在直线为 $x,y,z$ 轴,建立空间直角坐标系,则 $P(0,0,\sqrt{3})$,$A(1,0,0)$,$B(1,2,0)$,$C(-1,2,0)$,$E\left(-\frac{1}{2},1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, ……………………… 8分

故 $\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$,$\overrightarrow{BC}=(-2,0,0)$,$\overrightarrow{BE}=\left(-\frac{3}{2},-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. ………… 9分

设 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$ 为平面 $AEB$ 的法向量,则有 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}2y_1=0,\\ -\frac{3}{2}x_1-y_1+\frac{\sqrt{3}}{2}z_1=0,\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},0,3)$. ……………………… 11分

设 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$ 为平面 $CEB$ 的法向量,则有 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}-2x_2=0,\\ -\frac{3}{2}x_2-y_2+\frac{\sqrt{3}}{2}z_2=0,\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{m}=(0,\sqrt{3},2)$, ……………………… 13分

则 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{6}{2\sqrt{3}\times\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$, ……………………… 14分

所以平面 $AEB$ 与平面 $CEB$ 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$. ……………………… 15分

**17. 解:**(1)由题意知 $b_4-b_2=8$,$b_3-b_1=4$,$a_1+b_1=4$, ……………………… 1分

因为 $a_{2n-1}=b_{2n-1}+12m$,$a_{2n}=mb_{2n}$,所以 $\begin{cases}a_1=b_1+12m,\\ a_2=mb_2,\\ a_3=b_3+12m,\\ a_4=mb_4,\\ a_1+b_1=2a_1-12m.\end{cases}$ ………… 2分

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$,

则 $\begin{cases}a_3-a_1=b_3-b_1=4=2d,\\ a_4-a_2=m(b_4-b_2)=8m=2d,\\ a_1+b_1=2a_1-12m=4,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}d=2,\\ m=\frac{1}{2},\\ b_1=-1,\\ a_1=5,\end{cases}$ ……………………… 5分

所以 $a_n=5+(n-1)\times 2=2n+3$,所以 $m$ 的值为 $\frac{1}{2}$,$\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n+3$. ……………………… 7分

(2)由(1)知,$a_n=2n+3$,$b_{2n-1}=a_{2n-1}-6$,$b_{2n}=2a_{2n}$, ……………………… 8分

所以 $S_{2n}=(b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{2n-1})+(b_2+b_4+b_6+\cdots+b_{2n})=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}-6n)+2(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n})=\frac{n(a_1+a_{2n-1})}{2}-6n+2\times\frac{n(a_2+a_{2n})}{2}=\frac{n(5+4n+1)}{2}-6n+n(7+4n+3)=6n^2+7n$, ……… 14分

所以 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 $S_{2n}=6n^2+7n$.

……………………………… 15分

## 解答5 "15~17题"43分练

**15. 解:**(1)由题知 $a_n>0$,设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q$,则 $q>0$,

由 $\begin{cases}a_2a_4=16,\\ S_5=S_3+24,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a_3=4,\\ a_4+a_5=24,\end{cases}$

即 $\begin{cases}a_1q^2=4,\\ a_1q^3+a_1q^4=24,\end{cases}$ ………… 2分

整理得 $q^2+q-6=0$, ……………… 4分

解得 $q=2$ 或 $q=-3$(舍去),所以 $a_n=a_3q^{n-3}=2^{n-1}$. ……………………… 6分

(2)由(1)可知 $a_n+\log_2 a_n=2^{n-1}+n-1$, ……………………………… 7分

故 $T_n=(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1})+(0+1+2+\cdots+n-1)=2^n-1+\frac{n(n-1)}{2}$.

……………………………… 10分

显然,$T_n$ 随着 $n$ 的增大而增大,

又 $T_{10}=2^{10}-1+45=1068<2024$,

……………………………… 11分

$T_{11}=2^{11}-1+55=2102>2024$,

……………………………… 12分

所以满足 $T_n<2024$ 的最大整数 $n=10$.

……………………………… 13分

**16. 解:**(1)由题意知 $\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=3.5$, ……………………………… 1分

$\bar{y}=\frac{1}{6}\times(15.4+25.4+35.4+85.4+155.4+195.4)=85.4$, ………… 2分

$\sum\limits_{i=1}^{6}x_i^2-6\bar{x}^2=1+4+9+16+25+36-6\times 3.5^2=17.5$, ……………… 3分

所以 $r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{6}x_iy_i-6\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{6}x_i^2-6\bar{x}^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{6}y_i^2-6\bar{y}^2}}=\frac{2463.4-6\times3.5\times85.4}{\sqrt{17.5}\times20\sqrt{70}}=\frac{670}{20\times35}\approx 0.96$. ……………………………… 7分

(2)由题知 $\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{6}x_iy_i-6\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{6}x_i^2-6\bar{x}^2}=\frac{2463.4-6\times3.5\times85.4}{17.5}=\frac{268}{7}$,

……………………………… 9分

所以 $\hat{a}=85.4-3.5\times\frac{268}{7}=-\frac{243}{5}$,

……………………………… 11分

所以 $y$ 关于 $x$ 的经验回归方程为 $\hat{y}=\frac{268}{7}x-\frac{243}{5}$, ……………………… 13分

所以预测2025年2月该公司的销售金额为 $\frac{268}{7}\times7-\frac{243}{5}=219.4$(万元).

……………………………… 15分

**17. 解:**(1)由题意可知 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{1}{3},\\ \frac{1}{a^2}+\frac{64}{9b^2}=1,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$

……………………………… 2分

解得 $\begin{cases}c^2=1,\\ b^2=8,\\ a^2=9,\end{cases}$ ……………………… 4分

所以椭圆 $E$ 的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$.

……………………………… 5分

(2)设直线 $l$ 的方程为 $x=my-1$,$C(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$,由(1)知 $A(-3,0)$,$B(3,0)$.

由 $\begin{cases}x=my-1,\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1,\end{cases}$ 得 $(8m^2+9)y^2-$

$16my-64=0$, …………………… 7 分

则 $y_1+y_2=\frac{16m}{8m^2+9}$, $y_1y_2=\frac{-64}{8m^2+9}$, $\Delta>0$. …………………… 9 分

直线 $AC$ 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+3}(x+3)$,

直线 $BD$ 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2-3}(x-3)$,

联立直线 $AC,BD$ 的方程,得 $\frac{x+3}{x-3}=$

$$\frac{y_2(x_1+3)}{y_1(x_2-3)}=\frac{y_2(my_1+2)}{y_1(my_2-4)}=\frac{my_1y_2+2y_2}{my_1y_2-4y_1}=\frac{\frac{-64m}{8m^2+9}+2y_2}{\frac{-64m}{8m^2+9}-4y_1}=\frac{\frac{-32m}{8m^2+9}+y_2}{\frac{-32m}{8m^2+9}-2\left(\frac{16m}{8m^2+9}-y_2\right)}=\frac{\frac{-32m}{8m^2+9}+y_2}{\frac{-64m}{8m^2+9}+2y_2}=\frac{1}{2}$$, …………… 11 分

解得 $x=-9$, $y=\frac{-6y_1}{x_1+3}$, 即 $P\left(-9,\frac{-6y_1}{x_1+3}\right)$. …………………… 13 分

因为点 $O$ 是 $AB$ 的中点, $OM/\!/PA$, 所以 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}$,

所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(-3,0)\cdot\left(-6,\frac{-6y_1}{x_1+3}\right)=9$,

所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}$ 是定值,且该定值为 9. …………………… 15 分

## 解答 6 "15~17 题" 43 分练

**15. 解**:(1)证明:如图①,取 $BC$ 的中点 $M$,连接 $MA,MA_1$.

因为 $AB=AC$, $A_1B=A_1C$, 所以 $BC\perp AM$, $BC\perp A_1M$, 因为 $AM,A_1M\subset$ 平面 $A_1MA$, 且 $AM\cap A_1M=M$, 所以 $BC\perp$ 平面 $A_1MA$, …………………… 2 分

因为 $A_1A\subset$ 平面 $A_1MA$, 所以 $BC\perp A_1A$, 又因为 $A_1A/\!/B_1B$, 所以 $B_1B\perp BC$. …………………… 3 分

因为平面 $BB_1C_1C\perp$ 平面 $ABC$, 平面 $BB_1C_1C\cap$ 平面 $ABC=BC$, 且 $B_1B\subset$ 平面 $BB_1C_1C$,

所以 $B_1B\perp$ 平面 $ABC$, ………… 5 分

因为 $A_1A/\!/B_1B$, 所以 $A_1A\perp$ 平面 $ABC$. …………………… 6 分

(2)方法一:因为 $\angle BAC=90^\circ$, 且 $BC=2$, 所以 $AB=AC=\sqrt{2}$.

由(1)知 $A_1A\perp AB$, $A_1A\perp AC$, 以 $A$ 为原点, $AB,AC,AA_1$ 所在直线分别为 $x,y,z$ 轴,建立如图②所示的空间直角坐标系,则 $A_1(0,0,2)$, $B(\sqrt{2},0,0)$, $C(0,\sqrt{2},0)$, $C_1(0,\sqrt{2},2)$,

所以 $\overrightarrow{A_1B}=(\sqrt{2},0,-2)$, $\overrightarrow{A_1C}=(0,\sqrt{2},-2)$, $\overrightarrow{A_1C_1}=(0,\sqrt{2},0)$. ………… 8 分

设平面 $A_1BC$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1C}=0,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}\sqrt{2}x_1-2z_1=0,\\ \sqrt{2}y_1-2z_1=0,\end{cases}$

令 $z_1=1$, 则 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{2},\sqrt{2},1)$. … 10 分

设平面 $A_1BC_1$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}\sqrt{2}x_2-2z_2=0,\\ \sqrt{2}y_2=0,\end{cases}$

令 $z_2=1$, 则 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{2},0,1)$. …… 12 分

设平面 $A_1BC$ 与平面 $A_1BC_1$ 的夹角为 $\theta$, 则 $\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{3}{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$,

所以平面 $A_1BC$ 与平面 $A_1BC_1$ 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$. …………………… 13 分

方法二:由题知三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 是底面为直角三角形的直三棱柱,将直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 补成长方体 $ABDC\text{-}A_1B_1D_1C_1$,如图③.

连接 $C_1D$, 则平面 $A_1BC_1$ 即为平面 $A_1BDC_1$, 过点 $C$ 作 $CP\perp C_1D$, 垂足为 $P$, 再过 $P$ 作 $PQ\perp A_1B$, 垂足为 $Q$, 连接 $CQ$.

因为 $BD\perp$ 平面 $CDD_1C_1$, 且 $CP\subset$ 平面 $CDD_1C_1$, 所以 $BD\perp CP$. ……… 7 分

又因为 $CP\perp C_1D$, $BD,C_1D\subset$ 平面 $A_1BDC_1$, 且 $BD\cap C_1D=D$,

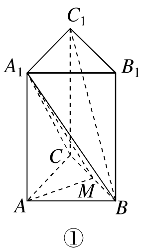
所以 $CP\perp$ 平面 $A_1BDC_1$, 又 $PQ\subset$ 平面 $A_1BDC_1$, 所以 $CP\perp PQ$. ……… 9 分

因为 $A_1B\subset$ 平面 $A_1BDC_1$, 所以 $A_1B\perp CP$, 又因为 $PQ\perp A_1B$, $CP,PQ\subset$ 平面 $CPQ$, 且 $CP\cap PQ=P$, 所以 $A_1B\perp$ 平面 $CPQ$,

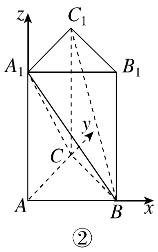
因为 $CQ\subset$ 平面 $CPQ$, 所以 $CQ\perp A_1B$, 则 $\angle CQP$ 为平面 $A_1BC$ 与平面 $A_1BC_1$ 的夹角. …………………… 11 分

在 $\triangle A_1BC$ 中,由等面积法可得 $CQ=\frac{\sqrt{30}}{3}$. 易知 $PQ=A_1C_1=\sqrt{2}$, 又 $CP\perp PQ$, 所以 $\cos\angle CQP=\frac{PQ}{CQ}=\frac{\sqrt{15}}{5}$,

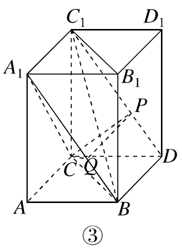
所以平面 $A_1BC$ 与平面 $A_1BC_1$ 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$. …………………… 13 分




①




②




③

**16. 解**:(1) $f'(x)=2e^{2x}-(2a-1)e^x-a=(2e^x+1)(e^x-a)$. …………………… 1 分

①当 $a\leqslant 0$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增. …………………… 2 分

②当 $a>0$ 时,令 $f'(x)=0$, 得 $x=\ln a$.

当 $x\in(-\infty,\ln a)$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减,

当 $x\in(\ln a,+\infty)$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增. …………………… 4 分

综上所述,当 $a\leqslant 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增;

当 $a>0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减,在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增.

…………………………………… 5 分

(2)当 $a\leqslant 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增, $f(x)$ 不可能有两个零点,不符合题意,故 $a>0$. ………… 6 分

当 $a>0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减,在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增,

因为 $f(x)$ 有两个零点,所以 $f(x)_{\min}=f(\ln a)=a(1-a-\ln a)<0$, … 8 分

因为 $a>0$, 所以 $1-a-\ln a<0$.

…………………………………… 9 分

令 $g(a)=1-a-\ln a$, $a>0$, … 10 分

则 $g'(a)=-1-\frac{1}{a}<0$, 所以 $g(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,又 $g(1)=0$,

所以当 $a>1$ 时, $g(a)<0$,

即 $f(x)_{\min}<0$. …………………… 12 分

方法一:因为 $f(-1)=\frac{1}{e^2}-(2a-1)\frac{1}{e}+a=\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e}+a\left(1-\frac{2}{e}\right)>0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-1,\ln a)$ 上有 1 个零点;

…………………………………… 13 分

令 $h(x)=e^x-x-1$, 则 $h'(x)=e^x-1$,

由 $h'(x)>0$ 得 $x>0$,

由 $h'(x)<0$ 得 $x<0$,

所以函数 $h(x)=e^x-x-1$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减,在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $h(x)\geqslant h(0)=0$, 所以当 $x>\ln a>0$ 时, $e^x>x+1$, 故 $-ax>-a(e^x-1)$, 所以 $f(x)>e^{2x}-(2a-1)e^x-a(e^x-1)=e^{2x}-(3a-1)e^x+a$,

取 $x=\ln(3a)>\ln a$, 则 $f[\ln(3a)]>e^{2\ln(3a)}-(3a-1)e^{\ln(3a)}+a=9a^2-(3a-1)\times 3a+a=4a>0$, 所以 $f(x)$ 在 $(\ln a,\ln(3a))$ 上有 1 个零点. ………… 14 分

综上所述,当 $f(x)$ 有两个零点时, $a>1$. …………………… 15 分

方法二:当 $x\to-\infty$ 时, $f(x)\to+\infty$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上有 1 个零点;

…………………………………… 13 分

当 $x\to+\infty$ 时, $f(x)\to+\infty$, 则 $f(x)$ 在 $(\ln a,+\infty)$ 上有 1 个零点. …… 14 分

综上所述,当 $f(x)$ 有两个零点时, $a>1$. …………………… 15 分

**17. 解**:(1)由顾客的消费额 $X$(单位:元)服从正态分布 $N(130,25^2)$, 得 $\mu=130$, $\sigma=25$, …………………… 1 分

所以消费额 $X$ 在 $[105,180]$ 内的概率为

$P(105\leqslant X\leqslant 180)=P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)\approx\frac{1}{2}\times(0.682\ 7+0.954\ 5)=0.818\ 6$, …………………… 4 分

因为该天该商场有 20 000 位顾客,所以估计该天消费额 $X$ 在[105,180]内的人数约为 $0.818\ 6\times 20\ 000=16\ 372$.

…………………………… 5 分

(2)设事件 $A_1$="顾客中'龙腾奖'",事件 $A_2$="顾客中'旺旺奖'",事件 $B$="顾客获得乙奖品", …………… 6 分

由题意知 $P(A_1)=\frac{3^3}{6^3}=\frac{1}{8}$, $P(B|A_1)=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{7}{16}$, $P(B|A_2)=\frac{1}{4}$. …………………………… 7 分

设事件 $D_1$="3 枚骰子的点数之和为 6", $D_2$="3 枚骰子的点数之和为 12", $D_3$="3 枚骰子的点数之和为 18",则 $A_2=D_1+D_2+D_3$.

(i)若"3 枚骰子的点数之和为 6",则 3 枚骰子的点数为 1,1,4;1,2,3;2,2,2. $D_1$ 包含的样本点有 $C_3^2C_1^1+A_3^3+1=3+6+1=10$(个). ……………… 8 分

(ii)若"3 枚骰子的点数之和为 12",则 3 枚骰子的点数为 1,5,6;2,5,5;2,4,6;3,4,5;3,3,6;4,4,4. $D_2$ 包含的样本点有 $A_3^3+C_3^1C_2^2+A_3^3+A_3^3+C_3^2C_1^1+1=6+3+6+6+3+1=25$(个). ……… 9 分

(iii)若"3 枚骰子的点数之和为 18",则 3 枚骰子的点数为 6,6,6, $D_3$ 包含的样本点有 1 个.

所以 $P(A_2)=\frac{10+25+1}{6^3}=\frac{36}{6^3}=\frac{1}{6}$.

…………………………… 10 分

①由全概率公式可得 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=\frac{1}{8}\times\frac{7}{16}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}=\frac{37}{384}$,即顾客获得乙奖品的概率为 $\frac{37}{384}$. ………… 12 分

②若顾客已获得乙奖品,则其是中"龙腾奖"而获得的概率是 $P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{8}\times\frac{7}{16}}{\frac{37}{384}}=\frac{21}{37}$, ………………… 14 分

所以顾客已获得乙奖品,则其是中"龙腾奖"而获得的概率是 $\frac{21}{37}$. …… 15 分

**解答 7 "15~17 题" 43 分练**

**15. 解:**(1)由题知 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $S=\frac{1}{2}ac\cdot\sin B$, …………………………… 2 分

因为 $S=-\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+c^2-b^2)$,所以 $\frac{1}{2}ac\cdot\sin B=-\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2ac\cdot\cos B$,

可得 $\tan B=-\sqrt{3}$, ……………… 4 分

又 $B\in(0,\pi)$,所以 $B=\frac{2\pi}{3}$. …… 5 分

(2)方法一: $\angle CBD=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}$,

在 $\triangle ABD$ 中,由正弦定理得 $\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{AD}{\sin\frac{\pi}{2}}=AD=2$, … 6 分

同理,在 $\triangle CBD$ 中,有 $\frac{CB}{\sin\angle CDB}=\frac{CD}{\sin\frac{\pi}{6}}=2CD=2$, ……………… 8 分

又 $\angle ADB+\angle CDB=\pi$,

所以 $\sin\angle ADB=\sin\angle CDB$, …… 9 分

所以 $AB=CB$,即 $a=c$. ……… 10 分

在 $\triangle ABC$ 中, $b^2=c^2+a^2-2ca\cdot\cos\angle ABC$,即 $3^2=c^2+a^2+ac=3a^2$,

可得 $a=\sqrt{3}$,所以 $c=a=\sqrt{3}$, … 12 分

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $3+2\sqrt{3}$. … 13 分

方法二:由(1)可知 $\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$,

又 $\angle ABD=\frac{\pi}{2}$,所以 $\angle CBD=\frac{\pi}{6}$.

……………………………… 6 分

由题可知, $AD=2DC=2$,

故 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$,

……………………………… 8 分

因为 $\angle ABD=\frac{\pi}{2}$,所以 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}\cdot\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}\right)=\frac{1}{3}c^2-\frac{1}{3}ac=0$, ………………………… 9 分

又 $c>0$,所以 $a=c$,则 $A=C=\frac{\pi}{6}$.

……………………………… 11 分

在 Rt$\triangle ABD$ 中, $c=AD\cdot\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$,

……………………………… 12 分

故 $\triangle ABC$ 的周长为 $AB+BC+AC=\sqrt{3}+\sqrt{3}+3=3+2\sqrt{3}$. ………… 13 分

**16. 解:**(1)设椭圆 $E$ 的焦距为 $2c(c>0)$,设椭圆上一点 $P(x_0,y_0)(-a\leqslant x_0\leqslant a)$,易知 $F_2(c,0)$,则 $|PF_2|=\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}=\sqrt{(x_0-c)^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x_0^2}=\sqrt{\left(\frac{c}{a}x_0\right)^2-2cx_0+a^2}=\left|\frac{c}{a}x_0-a\right|$,显然当 $x_0=a$ 时, $|PF_2|$ 取得最小值 $a-c$. ……………………… 2 分

由题意得 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{1}{2},\\ a-c=1,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ c=1,\\ b=\sqrt{3},\end{cases}$

……………………………… 4 分

所以椭圆 $E$ 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

……………………………… 5 分

(2)设 $C(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,

由(1)知 $|F_1F_2|=2$, $|F_2A|=a-c=1$.

因为 $AB\parallel CF_1$,所以 $\triangle CF_1F_2\backsim\triangle BAF_2$,得 $|CF_1|:|AB|=|F_1F_2|:|F_2A|=2:1$,所以 $y_1=-2y_2$①.

……………………………… 9 分

由题知直线 $l$ 的斜率不为 0,设直线 $l$ 的方程为 $x=my+1$,

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ x=my+1,\end{cases}$ 整理得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$,

得 $\begin{cases}y_1+y_2=-\frac{6m}{3m^2+4},\\ y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4},\end{cases}$ ……… 11 分

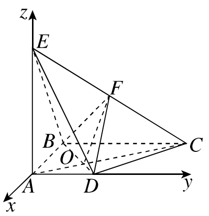
把①式代入上式得 $\begin{cases}-y_2=-\frac{6m}{3m^2+4},\\ -2y_2^2=-\frac{9}{3m^2+4},\end{cases}$

得 $y_2^2=\frac{36m^2}{(3m^2+4)^2}=\frac{9}{2(3m^2+4)}$,

解得 $m=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$, ……………… 14 分

所以直线 $l$ 的方程为 $x+\frac{2\sqrt{5}}{5}y-1=0$ 或 $x-\frac{2\sqrt{5}}{5}y-1=0$. ……………… 15 分

**17. 解:**(1)证明:设 $AC$ 与 $BD$ 的交点为 $O$,连接 $OF$,如图.




因为 $AD\parallel BC$,且 $AB\perp AD$,所以 $AB\perp BC$.

……………………………… 2 分

因为 $2AD=2$,所以 $AD=1$,

又 $AB=\sqrt{2}$, $BC=2$,

所以 $\tan\angle ABD=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\angle BCA=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

又 $\angle ABD$, $\angle BCA$ 均为锐角,

所以 $\angle ABD=\angle BCA$,

所以 $\angle BAC+\angle ABD=\angle BAC+\angle BCA=90^\circ$, ……………… 4 分

所以 $\angle AOB=90^\circ$,

所以 $AO\perp OB$,即 $AC\perp BD$.

因为 $EA\perp$ 平面 $ABCD$, $BD\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $EA\perp BD$,

因为 $EA\cap AC=A$, $EA$, $AC\subset$ 平面 $EAC$,所以 $BD\perp$ 平面 $EAC$, …… 6 分

又 $BD\perp\alpha$,所以平面 $\alpha$//平面 $EAC$.

……………………………… 7 分

(2)因为 $AB\perp AD$, $EA\perp$ 平面 $ABCD$,所以 $AB$, $AD$, $EA$ 两两垂直.

以 $A$ 为原点, $AB$, $AD$, $EA$ 所在直线分别为 $x$, $y$, $z$ 轴,建立如图所示的空间直角坐标系, ……………… 9 分

则 $A(0,0,0)$, $D(0,1,0)$, $B(-\sqrt{2},0,0)$,

$E(0,0,2)$，$C(-\sqrt{2},2,0)$，所以 $\overrightarrow{AD}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{BD}=(\sqrt{2},1,0)$，$\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{BE}=(\sqrt{2},0,2)$，

因为点 $F$ 为棱 $EC$ 的中点，所以 $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BE})=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1,1\right)$. …… 11 分

设平面 $FBD$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{BF}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}\sqrt{2}x+y=0,\\ \frac{\sqrt{2}}{2}x+y+z=0,\end{cases}$

取 $x=2$，得 $\boldsymbol{n}=(2,-2\sqrt{2},\sqrt{2})$.
………………………………… 13 分

设直线 $AD$ 与平面 $FBD$ 所成的角为 $\theta$，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AD},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AD}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|-2\sqrt{2}|}{1\times\sqrt{4+8+2}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，………… 14 分

所以直线 $AD$ 与平面 $FBD$ 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$. ………………… 15 分

## 解答 8 “15～17 题” 43 分练

**15. 解**：(1)由题可得 $2\cos A-3(2\cos^2A-1)=3$，即 $3\cos^2A-\cos A=0$，…… 2 分

解得 $\cos A=\frac{1}{3}$ 或 $\cos A=0$. … 5 分

(2)方法一：因为 $2b=3c$，所以由正弦定理得 $2\sin B=3\sin C$，…………… 6 分

即 $2\sin(A+C)=3\sin C$，

即 $2\sin A\cos C+2\sin C\cos A=3\sin C$.
………………………………… 8 分

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，所以由(1)知 $\cos A=\frac{1}{3}$，所以 $\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，
………………………………… 10 分

所以 $\frac{4\sqrt{2}}{3}\cos C+\frac{2}{3}\sin C=3\sin C$，

又 $\sin^2C+\cos^2C=1$，所以 $\sin C=\frac{4\sqrt{2}}{9}$.
………………………………… 13 分

方法二：因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，所以由(1)知 $\cos A=\frac{1}{3}$，由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{3}$，……… 7 分

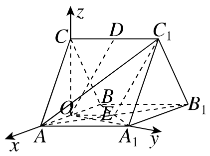
又 $2b=3c$，所以 $\frac{\frac{9c^2}{4}+c^2-a^2}{3c^2}=\frac{1}{3}$，可得 $c^2=\frac{4}{9}a^2$，………………… 9 分

所以 $c=\frac{2}{3}a$，所以 $\sin C=\frac{2}{3}\sin A$.
………………………………… 11 分

因为 $\cos A=\frac{1}{3}$，所以 $\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以 $\sin C=\frac{2}{3}\sin A=\frac{4\sqrt{2}}{9}$. … 13 分

**16. 解**：(1)证明：如图，连接 $A_1B$，交 $AB_1$ 于点 $E$，连接 $OE$，$C_1E$，…………… 1 分

由题知四边形 $AA_1B_1B$ 是菱形，




则 $E$ 为 $AB_1$ 的中点，∵ $O$ 是 $AB$ 的中点，$D$ 为 $CC_1$ 的中点，

∴ $OE\parallel BB_1\parallel DC_1$，$OE=\frac{1}{2}BB_1=DC_1$，……… 3 分

∴四边形 $OEC_1D$ 为平行四边形，

∴$OD\parallel C_1E$. ……………………… 4 分

∵ $OD\not\subset$ 平面 $AC_1B_1$，$C_1E\subset$ 平面 $AC_1B_1$，∴$OD\parallel$平面 $AC_1B_1$. …… 5 分

(2)如图，连接 $OC$，∵$\angle BAA_1=60°$，

∴$\triangle BAA_1$ 为正三角形，∴$A_1O\perp AB$，

又 $A_1O\perp BC$，且 $BC\cap AB=B$，

∴$A_1O\perp$平面 $ABC$，

又 $CO\subset$平面 $ABC$，∴$A_1O\perp CO$.

∵$\triangle ABC$ 是正三角形，∴$CO\perp AB$.

以 $O$ 为原点，$OA$，$OA_1$，$OC$ 所在直线分别为 $x,y,z$ 轴建立如图所示的空间直角坐标系. ……………………… 7 分

设 $AB=2$，得 $A_1O=OC=\sqrt{3}$，

则 $A(1,0,0)$，$A_1(0,\sqrt{3},0)$，$C(0,0,\sqrt{3})$，$B_1(-2,\sqrt{3},0)$，

由 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$，可得 $C_1(-1,\sqrt{3},\sqrt{3})$，

∴$\overrightarrow{AC_1}=(-2,\sqrt{3},\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AA_1}=(-1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{AB_1}=(-3,\sqrt{3},0)$. ………… 9 分

设平面 $A_1AC_1$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AC_1}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{AA_1}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x+\sqrt{3}y+\sqrt{3}z=0,\\ -x+\sqrt{3}y=0,\end{cases}$

令 $x=\sqrt{3}$，得 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},1,1)$. …… 11 分

设平面 $AC_1B_1$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{AC_1}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AB_1}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}-2a+\sqrt{3}b+\sqrt{3}c=0,\\ -3a+\sqrt{3}b=0,\end{cases}$ 令 $a=\sqrt{3}$，得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},3,-1)$. ……………… 13 分

设平面 $A_1AC_1$ 与平面 $AC_1B_1$ 的夹角为 $\theta$，则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{5}{\sqrt{5}\times\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{65}}{13}$，

∴平面 $A_1AC_1$ 与平面 $AC_1B_1$ 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{65}}{13}$. ……………… 15 分

**17. 解**：(1)根据题意可知，$X$ 的可能取值为 $0,1,2$，……………………… 1 分

$P(X=0)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$，…………… 2 分

$P(X=1)=\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$，…… 3 分

$P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$，…………… 4 分

可得 $X$ 的分布列为

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{3}{10}$ |

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$. ……………………… 6 分

(2)证明：依题意，棋子在第 1 格为必然事件，所以 $P_1=1$，棋子跳到第 2 格的概率为 $P_2=\frac{C_3^2+C_2^2}{C_5^2}=\frac{2}{5}$，得 $P_2-P_1=-\frac{3}{5}$. ……………………… 7 分

当 $3\leqslant n\leqslant 24$ 时，棋子跳到第 $n$ 格有两种情况：第一种，棋子从第 $n-2$ 格向前跳 2 格；第二种，棋子从第 $n-1$ 格向前跳 1 格. 因为棋子向前跳 2 格的概率为 $\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}$，棋子向前跳 1 格的概率为 $\frac{C_3^2+C_2^2}{C_5^2}=\frac{2}{5}$，……………… 9 分

所以 $P_n=\frac{3}{5}P_{n-2}+\frac{2}{5}P_{n-1}(3\leqslant n\leqslant 24)$，……………………… 12 分

所以 $P_n-P_{n-1}=\frac{3}{5}P_{n-2}+\frac{2}{5}P_{n-1}-P_{n-1}=-\frac{3}{5}(P_{n-1}-P_{n-2})(3\leqslant n\leqslant 24)$，

因此可得 $\frac{P_n-P_{n-1}}{P_{n-1}-P_{n-2}}=-\frac{3}{5}(3\leqslant n\leqslant 24)$，……………………… 14 分

所以数列 $\{P_n-P_{n-1}\}(n=2,3,\cdots,24)$ 是公比为 $-\frac{3}{5}$ 的等比数列. … 15 分

## 解答 9 “15～17 题” 43 分练

**15. 解**：(1)由 $c-b=2c\sin^2\frac{A}{2}$，可得 $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{c-b}{2c}$，所以 $\frac{1-\cos A}{2}=\frac{c-b}{2c}$，
………………………………… 2 分

即 $\frac{1}{2}-\frac{\cos A}{2}=\frac{1}{2}-\frac{b}{2c}$，所以 $\cos A=\frac{b}{c}$，……………………… 4 分

又由余弦定理得 $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b}{c}$，可得 $a^2+b^2=c^2$，所以 $C=\frac{\pi}{2}$，

所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形. …… 6 分

(2)由(1)知 $\triangle ABC$ 是直角三角形，又 $c=1$，所以 $a=\sin A$，$b=\cos A$，
………………………………… 8 分

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $1+\sin A+\cos A=1+\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)$，… 10 分

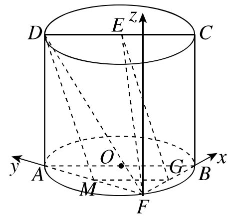
因为 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $A+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，所以当 $A+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $A=\frac{\pi}{4}$ 时，$\triangle ABC$ 的周长取得最大值 $\sqrt{2}+1$.
………………………………… 13 分

**16. 解**：(1)证明：取 $AF$ 的中点 $M$，连接 $DM$，$GM$，如图所示，…………… 1 分

因为 $G$ 为 $BF$ 的中点，所以 $GM\parallel AB$，$GM=\frac{1}{2}AB$，又 $AB\parallel DE$，$DE=\frac{1}{2}AB$，

所以 $GM\parallel DE$，$GM=DE$，

所以四边形 $DEGM$ 为平行四边形，
…………………………………… 3 分
所以 $DM/\!/EG$，………………… 4 分
又 $DM\subset$ 平面 $DAF$，$EG\not\subset$ 平面 $DAF$，
所以 $EG/\!/$平面 $DAF$. ………… 5 分




(2)由 $OB=BF=1$，易知 $\angle ABF=60^\circ$，又 $\angle AFB=90^\circ$，所以 $AF=\sqrt{3}$.
由 $DA\perp$ 平面 $ABF$，知 $\angle AFD$ 为直线 $DF$ 与圆柱底面所成的角，即 $\angle AFD=45^\circ$，所以 $AD=AF=\sqrt{3}$. ……… 7 分
如图，以 $F$ 为原点，$FB,FA$ 所在直线分别为 $x,y$ 轴，过 $F$ 且垂直于平面 $ABF$ 的直线为 $z$ 轴，建立空间直角坐标系，
则 $F(0,0,0)$，$G\left(\frac{1}{2},0,0\right)$，$D(0,\sqrt{3},\sqrt{3})$，$E\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{FD}=(0,\sqrt{3},\sqrt{3})$，$\overrightarrow{FE}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{EG}=\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{2},-\sqrt{3}\right)$. ……………………………… 10 分
设平面 $DEF$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，
则$\begin{cases}\overrightarrow{FD}\cdot\boldsymbol{n}=\sqrt{3}y+\sqrt{3}z=0,\\ \overrightarrow{FE}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$
令 $y=1$，得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,-1)$. … 13 分
设点 $G$ 到平面 $DEF$ 的距离为 $d$，
则 $d=\left|\frac{\overrightarrow{EG}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right|=\frac{\sqrt{15}}{10}$. ……………………………… 15 分

**17. 解**:(1)设 $P(x_0,y_0)(-2<x_0<6)$，则 $x_0^2=4y_0$. ……………………… 1 分
因为点 $P$ 是 $AQ$ 的中点，所以 $Q$ 的坐标为$(2x_0+2,2y_0-1)$. ………… 2 分
所以 $\overrightarrow{AP}=(x_0+2,y_0-1)$，$\overrightarrow{BQ}=(2x_0-4,2y_0-10)$. ……………… 3 分
因为 $AP\perp BQ$，所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BQ}=0$，
…………………………………… 4 分
所以$(x_0+2)\cdot(2x_0-4)+(y_0-1)\cdot(2y_0-10)=0$，即$(x_0+2)\cdot(x_0-2)+\left(\frac{x_0^2}{4}-1\right)\cdot\left(\frac{x_0^2}{4}-5\right)=0$，得 $x_0^2=4$，
…………………………………… 6 分
所以 $x_0=2$ 或 $x_0=-2$(舍去)，故点 $P$ 的坐标为$(2,1)$. ………………… 7 分
(2)证明:方法一，依题意，易知直线 $AP$ 的斜率存在，当直线 $AP$ 的斜率为 0 时，直线 $BQ$ 的斜率不存在，此时点 $P$ 的坐标为$(2,1)$，点 $Q$ 的坐标为$(6,1)$，得$|BQ|=8$. ……………………… 8 分
当直线 $AP$ 的斜率不为 0 时，设直线 $AP$ 的斜率为 $k(k\neq0)$，则直线 $BQ$ 的斜率为 $-\frac{1}{k}$，则直线 $AP$ 的方程为 $y-1=k(x+2)$，直线 $BQ$ 的方程为 $y-9=-\frac{1}{k}(x-6)$，……………………… 9 分
由 $\begin{cases}y-1=k(x+2),\\ y-9=-\frac{1}{k}(x-6),\end{cases}$ 解得 $x=\frac{-2k^2+8k+6}{k^2+1}$，……………………… 10 分
即点 $Q$ 的横坐标为 $\frac{-2k^2+8k+6}{k^2+1}$，所以
$|BQ|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\left|\frac{-2k^2+8k+6}{k^2+1}-6\right|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\left|\frac{-8k^2+8k}{k^2+1}\right|=\frac{8|k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=8\sqrt{1-\frac{2k}{k^2+1}}=8\sqrt{1-\frac{2}{k+\frac{1}{k}}}$，……………… 13 分
因为 $k+\frac{1}{k}\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$，
所以 $|BQ|\leqslant8\sqrt{2}$，当且仅当 $k+\frac{1}{k}=-2$，即 $k=-1$ 时等号成立.
…………………………………… 14 分
而当 $k=-1$ 时，点 $A$ 与点 $P$ 重合，与已知矛盾，所以$|BQ|$无最大值.
…………………………………… 15 分
方法二，由题意知恒有 $BQ\perp AQ$，又点 $P$ 位于点 $A,B$ 之间的曲线段上，所以点 $Q$ 的轨迹是以 $AB$ 为直径，位于直线 $AB$ 下方的半圆. ……………………… 10 分
又点 $P$ 不与点 $A,B$ 重合，
$|AB|=\sqrt{(6+2)^2+(9-1)^2}=8\sqrt{2}$，所以$|BQ|<|AB|=8\sqrt{2}$，……… 13 分
即$|BQ|$无最大值. ……………… 15 分

## 解答 10 “15～17 题”43 分练

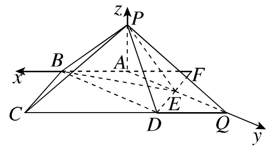
**15. 解**:(1)$0.0075\times20=0.15$，$0.0125\times20=0.25$，$1-(0.15+0.25)=0.6$，$0.6\times\frac{3}{3+2+1}=0.3$，$0.6\times\frac{2}{3+2+1}=0.2$，$0.6\times\frac{1}{3+2+1}=0.1$，所以从左到右各组的频率分别为 0.15，0.25，0.3，0.2，0.1，……………………… 3 分
估计高一年级 1000 名学生假期日均阅读时间的平均数为 $30\times0.15+50\times0.25+70\times0.3+90\times0.2+110\times0.1=67$(分钟). ……………………… 6 分
(2)由题意，在$[60,80)$，$[80,100)$，$[100,120]$三组分别抽取 3，2，1 人，…… 7 分
$X$ 的可能取值为 0，1，2，………… 8 分
则 $P(X=0)=\frac{C_4^3C_2^0}{C_6^3}=\frac{1}{5}$，……… 9 分
$P(X=1)=\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\frac{3}{5}$，……… 10 分
$P(X=2)=\frac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{5}$，……… 11 分
所以 $X$ 的分布列为

| X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |

$E(X)=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{5}=1$.
…………………………………… 13 分

**16. 解**:(1)$f(x)$ 的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}(a\neq0)$，
…………………………………… 1 分
当 $a<0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上单调递增；……………… 2 分
当 $a>0$ 时，若 $0<x<\frac{1}{a}$，则 $f'(x)>0$，若 $x>\frac{1}{a}$，则 $f'(x)<0$，
所以 $f(x)$ 在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递减. ……… 4 分
综上，当 $a<0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为$(0,+\infty)$，没有单调递减区间；
当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为$\left(0,\frac{1}{a}\right)$，单调递减区间为$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$.
…………………………………… 6 分
(2)令 $h(x)=f(x)-g(x)=\ln x-ax-\frac{2}{ax}(x>0)$，要使 $f(x)\leqslant g(x)$ 恒成立，只需使 $h(x)\leqslant0$ 恒成立，即 $h(x)_{\max}\leqslant0$. ……………… 8 分
$h'(x)=\frac{1}{x}-a+\frac{2}{ax^2}=\frac{-(ax+1)(ax-2)}{ax^2}$，……………… 10 分
因为 $a>0,x>0$，所以 $ax+1>0$ 恒成立，当 $0<x<\frac{2}{a}$ 时，$h'(x)>0$，当 $x>\frac{2}{a}$ 时，$h'(x)<0$，所以 $h(x)_{\max}=h\left(\frac{2}{a}\right)=\ln\frac{2}{a}-3\leqslant0$，……… 13 分
解得 $a\geqslant\frac{2}{e^3}$，所以 $a$ 的最小值为 $\frac{2}{e^3}$.
…………………………………… 15 分

**17. 解**:(1)证明：如图，延长 $BA$，交 $DE$ 的延长线于点 $F$，
因为 $AB/\!/CD$，$DE/\!/BC$，所以四边形 $FBCD$ 为平行四边形，………… 1 分
所以 $BF=CD=2\sqrt{2}$，$BC=DF=4$，
所以 $AF=BF-AB=\sqrt{2}$，$EF=DF-DE=2$，……………………… 2 分
故 $AE^2+AF^2=EF^2$，所以 $AE\perp BF$.
又 $AB/\!/CD$，所以 $CD\perp AE$. …… 3 分
又 $PA\perp$ 平面 $ABCDE$，$CD\subset$ 平面 $ABCDE$，所以 $PA\perp CD$. ………… 4 分
又 $PA\cap AE=A$，$PA,AE\subset$ 平面 $PAE$，
所以 $CD\perp$ 平面 $PAE$，………… 5 分
又 $PE\subset$ 平面 $PAE$，所以 $CD\perp PE$.
…………………………………… 6 分



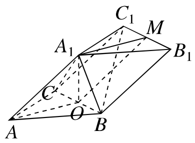

(2)连接 $PQ,AQ$,当 $PQ=3$ 时,$PQ\perp CD$,由(1)知 $PA\perp CD$,
因为 $PA\cap PQ=P,PA,PQ\subset$ 平面 $PAQ$,所以 $CD\perp$ 平面 $PAQ$.
又 $AQ\subset$ 平面 $PAQ$,所以 $CD\perp AQ$,
从而 $A,E,Q$ 三点共线,即线段 $AE,CD$ 的延长线交于点 $Q$. …………… 7 分
连接 $BD$.由(1)知 $A,E$ 分别是 $BF,DF$ 的中点,所以 $BD/\!/AE$,所以 $BD\perp AB$.
又 $AB/\!/DQ$,所以四边形 $ABDQ$ 是矩形,所以 $AQ=BD=\sqrt{BC^2-CD^2}=2\sqrt{2}$,又 $PQ^2=PA^2+AQ^2=9$,故 $PA=1$. …………………………… 8 分
以 $A$ 为坐标原点,$AB,AE,AP$ 所在直线分别为 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴,建立如图所示的空间直角坐标系,
则 $P(0,0,1),B(\sqrt{2},0,0),E(0,\sqrt{2},0),C(3\sqrt{2},2\sqrt{2},0),D(\sqrt{2},2\sqrt{2},0)$,
所以 $\overrightarrow{BP}=(-\sqrt{2},0,1),\overrightarrow{BE}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0),\overrightarrow{DP}=(-\sqrt{2},-2\sqrt{2},1),\overrightarrow{DC}=(2\sqrt{2},0,0)$. ……………………………… 9 分
设平面 $PBE$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,
则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BP}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\sqrt{2}x+z=0,\\ -\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=0,\end{cases}$
令 $x=1$,得 $\boldsymbol{m}=(1,1,\sqrt{2})$. …… 11 分
设平面 $PCD$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x',y',z')$,
则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\sqrt{2}x'-2\sqrt{2}y'+z'=0,\\ 2\sqrt{2}x'=0,\end{cases}$
令 $y'=1$,得 $\boldsymbol{n}=(0,1,2\sqrt{2})$. … 13 分
设平面 $PBE$ 与平面 $PCD$ 的夹角为 $\theta$,
则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{5}{2\times3}=\dfrac{5}{6}$,故平面 $PBE$ 与平面 $PCD$ 夹角的余弦值为 $\dfrac{5}{6}$. ……………… 15 分

## 解答 11 "15~17 题" 43 分练

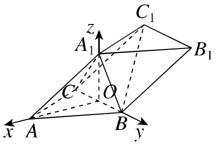
**15. 解:**(1)当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=1$. … 1 分
当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{1}{2}n(n+1)-\dfrac{1}{2}n(n-1)=n$, ……………… 3 分
当 $n=1$ 时,也满足 $a_n=n$, ……… 4 分
$\therefore a_n=n,n\in\mathbf{N}^*$. ……………… 5 分
(2)$b_n=\begin{cases}\dfrac{1}{a_na_{n+2}},n\text{ 为奇数},\\ 2^{a_n},n\text{ 为偶数}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right),n\text{ 为奇数},\\ 2^n,n\text{ 为偶数},\end{cases}$ … 7 分
则 $T_{2n}=(b_1+b_3+\cdots+b_{2n-1})+(b_2+b_4+\cdots+b_{2n})$ ……………………………… 8 分
$=\dfrac{1}{2}\left[\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)\right]+2^2+2^4+\cdots+2^{2n}$ … 10 分
$=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)+\dfrac{4(1-4^n)}{1-4}=\dfrac{n}{2n+1}+\dfrac{4^{n+1}-4}{3}$, ……………… 12 分
$\therefore\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 $T_{2n}=\dfrac{n}{2n+1}+\dfrac{4^{n+1}-4}{3}$. ……………………… 13 分

**16. 解:**(1)由题知 $a=1$,当直线 $l$ 过点 $M(2,0)$ 且与双曲线 $C$ 有且仅有一个公共点时,$l$ 与 $C$ 的渐近线平行.
不妨设直线 $l:y=b(x-2)$,即 $bx-y-2b=0$, ……………………………… 4 分
则点 $B(1,0)$ 到直线 $l$ 的距离为 $\dfrac{b}{\sqrt{1+b^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,$\therefore b=1$, ………… 5 分
$\therefore$ 双曲线 $C$ 的标准方程为 $x^2-y^2=1$. ……………………………………… 6 分
(2)由题可知,直线 $l$ 的斜率不为 0,且 $l$ 与 $C$ 的渐近线不平行,设直线 $l:x=my+2(m\neq\pm1),P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$,由 $\begin{cases}x^2-y^2=1,\\ x=my+2,\end{cases}$ 得 $(m^2-1)y^2+4my+3=0$, ……………………… 8 分
$\therefore\Delta=4m^2+12>0$,则 $y_1+y_2=\dfrac{-4m}{m^2-1}$,
$y_1y_2=\dfrac{3}{m^2-1}$, ………………………… 10 分
$\therefore my_1y_2=-\dfrac{3}{4}(y_1+y_2)$. …… 11 分
假设存在实数 $\lambda$,使得 $k_2=\lambda k_1$ 成立,
$\because k_1=\dfrac{y_1}{x_1+1},k_2=\dfrac{y_2}{x_2-1}$,
$\therefore\lambda=\dfrac{k_2}{k_1}=\dfrac{\dfrac{y_2}{x_2-1}}{\dfrac{y_1}{x_1+1}}=\dfrac{y_2(x_1+1)}{y_1(x_2-1)}=\dfrac{y_2(my_1+3)}{y_1(my_2+1)}=\dfrac{my_1y_2+3y_2}{my_1y_2+y_1}$ …… 13 分
$=\dfrac{-\dfrac{3}{4}(y_1+y_2)+3y_2}{-\dfrac{3}{4}(y_1+y_2)+y_1}=\dfrac{-\dfrac{3}{4}y_1+\dfrac{9}{4}y_2}{\dfrac{1}{4}y_1-\dfrac{3}{4}y_2}=-3$,故存在实数 $\lambda=-3$,使得 $k_2=\lambda k_1$ 成立. ……… 15 分

**17. 解:**(1)证明:方法一:如图,分别取 $BC,B_1C_1$ 的中点 $O,M$,连接 $OM,AO,A_1O,A_1M$,




………………………………………… 1 分
易知 $AA_1/\!/OM,AA_1=OM$,$\therefore$ 四边形 $AOMA_1$ 为平行四边形.
$\because$ 侧面 $BB_1C_1C$ 为矩形,$\therefore BB_1\perp BC$,
又 $OM/\!/BB_1$,$\therefore OM\perp BC$. …… 3 分
$\because$ 底面 $ABC$ 为等边三角形,$\therefore AO\perp BC$,又 $AO\cap OM=O,AO,OM\subset$ 平面 $AOMA_1$,$\therefore BC\perp$ 平面 $AOMA_1$, ………………………………… 4 分
又 $A_1O\subset$ 平面 $AOMA_1$,$\therefore BC\perp A_1O$, ………………………………… 5 分
又 $O$ 是 $BC$ 的中点,$\therefore A_1B=A_1C$. ………………………………… 6 分
方法二:如图,取 $BC$ 的中点 $O$,连接 $AO$,$A_1O$. … 1 分




$\because$ 侧面 $BB_1C_1C$ 为矩形,$\therefore BB_1\perp BC$,
又 $AA_1/\!/BB_1$,$\therefore AA_1\perp BC$. …… 3 分
$\because$ 底面 $ABC$ 为等边三角形,$\therefore AO\perp BC$, ………………………………… 4 分
又 $AO\cap AA_1=A$,$\therefore BC\perp$ 平面 $AA_1O$,
又 $A_1O\subset$ 平面 $AA_1O$,$\therefore A_1O\perp BC$. ………………………………… 5 分
$\because O$ 为 $BC$ 的中点,$\therefore A_1B=A_1C$. ………………………………… 6 分
(2)(i)证明:$\because AB=BC=AC=2,O$ 是 $BC$ 的中点,$\therefore AO=\sqrt{3},CO=BO=1$, ………………………………… 7 分
又 $A_1B=A_1C$ 且 $A_1C\perp A_1B$,$\therefore A_1C=A_1B=\sqrt{2},A_1O=1$.
$\because BC\perp A_1O,BC\perp AO$,$\therefore\angle A_1OA$ 为二面角 $A_1$-$BC$-$A$ 的平面角, …… 8 分
又 $A_1O^2+AO^2=A_1A^2$,$\therefore\angle A_1OA=\dfrac{\pi}{2}$,故平面 $A_1BC\perp$ 平面 $ABC$. ………………………………… 9 分
(ii)$\because OA_1,OA,OB$ 两两垂直,$\therefore$ 以 $O$ 为原点,$OA,OB,OA_1$ 所在直线分别为 $x,y,z$ 轴,建立如图所示的空间直角坐标系,则 $A_1(0,0,1),A(\sqrt{3},0,0),B(0,1,0),C(0,-1,0)$,
$\therefore\overrightarrow{CA}=(\sqrt{3},1,0),\overrightarrow{A_1B}=(0,1,-1),\overrightarrow{C_1A_1}=\overrightarrow{CA}=(\sqrt{3},1,0)$. ……… 11 分
设平面 $A_1BC_1$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\overrightarrow{C_1A_1}\cdot\boldsymbol{m}=\sqrt{3}x+y=0,\\ \overrightarrow{A_1B}\cdot\boldsymbol{m}=y-z=0,\end{cases}$ 取 $x=\sqrt{3}$,则 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},-3,-3)$, …… 13 分
易知平面 $ABC$ 的一个法向量为 $\overrightarrow{OA_1}=(0,0,1)$, ……………………… 14 分
$\because|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{OA_1}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{OA_1}|}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{OA_1}|}=\dfrac{3}{\sqrt{21}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$,
$\therefore$ 平面 $ABC$ 与平面 $A_1BC_1$ 的夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. ……………… 15 分

## 解答 12 "15~17 题" 43 分练

**15. 解:**(1)证明:因为 $(a+c)(\sin A+\sin C)=b\sin B+3c\sin A$,
所以由正弦定理得 $(a+c)^2=b^2+3ac$,
整理得 $a^2+c^2-b^2=ac$.

则 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{ac}{2ac}=\frac{1}{2}$,

…………………………………… 2 分

又 $B\in(0,\pi)$,所以 $B=\frac{\pi}{3}$. …… 3 分

因为 $\cos A=\frac{3}{5}\in\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$A\in(0,\pi)$,所以 $A\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$,又 $A+C=\frac{2\pi}{3}$,所以 $C\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{12}\right)$,所以 $\triangle ABC$ 是锐角三角形. ………………………… 5 分

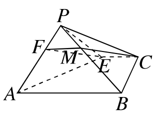
(2)因为 $\cos A=\frac{3}{5}$,所以 $\sin A=\frac{4}{5}$,所以 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$. ………………………… 8 分

在 $\triangle ABC$ 中,由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,即 $\frac{2}{\frac{4}{5}}=\frac{c}{\frac{4+3\sqrt{3}}{10}}$,所以 $c=\frac{4+3\sqrt{3}}{4}$, ………………………… 10 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{4+3\sqrt{3}}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9+4\sqrt{3}}{8}$.

…………………………………… 13 分

**16. 解:**(1)如图,过 $F$ 作 $FM/\!/AB$,交 $PB$ 于 $M$,连接 $MC$,$\because AB/\!/EC$,$\therefore FM/\!/EC$,




$\therefore M,F,E,C$ 四点共面. ……… 2 分

$\because EF/\!/$平面 $PBC$,平面 $EFMC\cap$平面 $PBC=MC$,$EF\subset$平面 $EFMC$,$\therefore EF/\!/MC$, ……………………… 4 分

$\therefore$ 四边形 $EFMC$ 为平行四边形,

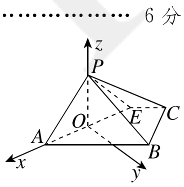
$\therefore EC=FM$,$\therefore\frac{MF}{AB}=\frac{EC}{AB}=\frac{1}{3}$.

…………………………………… 5 分

由 $\triangle PFM\backsim\triangle PAB$,可得 $\frac{AF}{FP}=2$.

…………………………………… 6 分

(2)如图,取 $AE$ 的中点 $O$,连接 $PO$,由题可得 $PA=PE$,$\therefore PO\perp AE$.




$\because$ 平面 $APE\perp$平面 $ABCE$,平面 $APE\cap$平面 $ABCE=AE$,$PO\subset$平面 $APE$,

$\therefore PO\perp$平面 $ABCE$. …………… 8 分

以 $O$ 为坐标原点,$OA$,$OP$ 所在直线分别为 $x$,$z$ 轴建立如图所示的空间直角坐标系,则 $P(0,0,1)$,$E(-1,0,0)$,$C\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2},0\right)$,$\therefore\overrightarrow{PE}=(-1,0,-1)$,

$\overrightarrow{EC}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$. ………… 10 分

设平面 $PEC$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PE}=-a-c=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EC}=-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b=0,\end{cases}$

取 $a=1$,则 $b=1$,$c=-1$,$\therefore\boldsymbol{m}=(1,1,-1)$. ………………………… 13 分

易知平面 $ABCE$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$,$\because|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\left|-\frac{1}{\sqrt{3}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\therefore$ 平面 $PEC$ 与平面 $ABCE$ 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$. …… 15 分

**17. 解:**(1)在排列 51243 中,与 5 构成逆序的数码有 4 个,与 1 构成逆序的数码有 0 个,与 2 构成逆序的数码有 0 个,与 4 构成逆序的数码有 1 个,与 3 构成逆序的数码有 0 个, ………………… 2 分

所以 $T(51243)=4+0+0+1+0=5$.

…………………………………… 4 分

(2)由(1)中的方法,同理可得 $T(3412)=4$, ………………………… 5 分

又 $T(51243)=5$,所以 $a_{n+1}=5a_n-4$,设 $a_{n+1}+\lambda=5(a_n+\lambda)$,

得 $a_{n+1}=5a_n+4\lambda$,所以 $4\lambda=-4$,解得 $\lambda=-1$,

则 $a_{n+1}-1=5(a_n-1)$. ………… 7 分

因为 $a_1-1=1\neq 0$,所以数列 $\{a_n-1\}$ 是首项为 1,公比为 5 的等比数列,

…………………………………… 8 分

所以 $a_n-1=5^{n-1}$,则 $a_n=5^{n-1}+1$.

…………………………………… 9 分

(3)因为 $j_i=n+1-i(i=1,2,\cdots,n)$,所以 $b_n=T(j_1j_2\cdots j_n)=n-1+n-2+\cdots+1+0=\frac{(n-1)n}{2}$, ……… 12 分

所以 $\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{2}{(n+1)n}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,

…………………………………… 13 分

所以 $S_n=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$.

…………………………………… 15 分

## 解答 13 "18 题、19 题"34 分练

**18. 解:**(1)当 $a=0$ 时,$f(x)=-2xe^x$,可得 $f'(x)=-2(x+1)e^x$, ………… 1 分

则 $f'(1)=-4e$,$f(1)=-2e$,…… 2 分

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y+2e=-4e(x-1)$,

即 $y=-4ex+2e$. ………………… 4 分

(2)当 $a=\frac{1}{2}$ 时,$f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-2xe^x$,定义域为 $\mathbf{R}$,可得 $f'(x)=e^{2x}-2(x+1)e^x=e^x(e^x-2x-2)$, ………… 5 分

令 $F(x)=e^x-2x-2$,则 $F'(x)=e^x-2$,当 $x\in(-\infty,\ln 2)$ 时,$F'(x)<0$,

当 $x\in(\ln 2,+\infty)$ 时,$F'(x)>0$,所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2)$ 上单调递减,在 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增, ……… 7 分

所以 $F(x)_{\min}=F(\ln 2)=2-2\ln 2-2=-2\ln 2<0$,又 $F(-1)=\frac{1}{e}>0$,$F(2)=e^2-6>0$, ……………………… 8 分

所以存在 $x_1\in(-1,\ln 2)$,使得 $F(x_1)=0$,存在 $x_2\in(\ln 2,2)$,使得 $F(x_2)=0$,所以当 $x\in(-\infty,x_1)$ 时,$F(x)>0$,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增;

当 $x\in(x_1,x_2)$ 时,$F(x)<0$,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减;

当 $x\in(x_2,+\infty)$ 时,$F(x)>0$,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增.

所以当 $a=\frac{1}{2}$ 时,$f(x)$ 存在一个极大值和一个极小值. ……………… 10 分

(3)由 $f(x)=ae^{2x}-2xe^x$,可得 $f'(x)=2ae^{2x}-2(x+1)e^x=2e^x(ae^x-x-1)$,因为对任意 $x\in\mathbf{R}$,$f(x)+\frac{1}{a}\leqslant 0$ 恒成立,所以 $f(0)+\frac{1}{a}=a+\frac{1}{a}=\frac{a^2+1}{a}\leqslant 0$,可得 $a<0$. ………… 11 分

令 $g(x)=ae^x-x-1$,则 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,

当 $x<0$ 时,$e^x\in(0,1)$,则 $ae^x\in(a,0)$,

所以 $g(x)=ae^x-x-1>a-x-1$,

则 $g(a-1)>a-(a-1)-1=0$,

又因为 $g(-1)=ae^{-1}<0$,所以存在 $x_0\in(a-1,-1)$,使得 $g(x_0)=0$,

即 $g(x_0)=ae^{x_0}-x_0-1=0$,且当 $x\in(-\infty,x_0)$ 时,$g(x)>0$,即 $f'(x)>0$,

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时,$g(x)<0$,即 $f'(x)<0$,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递增,在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减,

所以 $f(x)_{\max}=f(x_0)=ae^{2x_0}-2x_0e^{x_0}$.

由 $g(x_0)=ae^{x_0}-x_0-1=0$,可得 $a=\frac{x_0+1}{e^{x_0}}$. ………………… 14 分

因为对任意 $x\in\mathbf{R}$,$f(x)+\frac{1}{a}\leqslant 0$ 恒成立,所以只需 $f(x)_{\max}+\frac{1}{a}\leqslant 0$,可得 $(x_0+1)e^{x_0}-2x_0e^{x_0}+\frac{e^{x_0}}{x_0+1}\leqslant 0$,即 $\frac{(1-x_0)(1+x_0)+1}{x_0+1}\leqslant 0$,又 $x_0+1<0$,

所以 $(1-x_0)(1+x_0)+1\geqslant 0$,

即 $2-x_0^2\geqslant 0$,可得 $-\sqrt{2}\leqslant x_0<-1$.

因为 $a=\frac{x_0+1}{e^{x_0}}(-\sqrt{2}\leqslant x_0<-1)$,所以设 $h(x)=\frac{x+1}{e^x}(-\sqrt{2}\leqslant x<-1)$,

则 $h'(x)=\frac{-x}{e^x}>0$,可知 $h(x)$ 在 $[-\sqrt{2},-1)$ 上单调递增,所以 $h(x)\geqslant h(-\sqrt{2})=\frac{1-\sqrt{2}}{e^{-\sqrt{2}}}=(1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}$ 且 $h(x)<h(-1)=0$, ………………… 16 分

所以实数 $a$ 的取值范围是 $[(1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}},0)$. ………………… 17 分

19. **解**:(1)由题意可知 $X$ 的所有可能取值为 $-1,0,1$, ………………………… 1 分

且 $P(X=-1)=(1-\alpha)\beta$,$P(X=0)=\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta)$,$P(X=1)=\alpha(1-\beta)$, ………………………… 4 分

则 $X$ 的分布列为

| $X$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $P$ | $(1-\alpha)\beta$ | $\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta)$ | $\alpha(1-\beta)$ |

………………………… 5 分

(2)$\because \alpha=0.5,\beta=0.8$,$\therefore a=0.5\times0.8=0.4$,$b=0.5\times0.8+0.5\times0.2=0.5$,$c=0.5\times0.2=0.1$. ………………… 8 分

(i)证明:$\because p_i=ap_{i-1}+bp_i+cp_{i+1}(i=1,2,\cdots,7)$,$\therefore p_i=0.4p_{i-1}+0.5p_i+0.1p_{i+1}(i=1,2,\cdots,7)$,整理可得 $5p_i=4p_{i-1}+p_{i+1}(i=1,2,\cdots,7)$,$\therefore p_{i+1}-p_i=4(p_i-p_{i-1})(i=1,2,\cdots,7)$,

$\because p_1-p_0=p_1\neq0$,$\therefore \{p_{i+1}-p_i\}(i=0,1,2,\cdots,7)$是以 $p_1$ 为首项,以 4 为公比的等比数列. ………………… 10 分

(ii)由(i)知 $p_{i+1}-p_i=p_1\cdot4^i$,

$\therefore p_8-p_7=p_1\cdot4^7$,$p_7-p_6=p_1\cdot4^6$,$\cdots$,$p_1-p_0=p_1\cdot4^0$, ……… 12 分

以上各式累加可得 $p_8-p_0=p_1\cdot(4^0+4^1+\cdots+4^7)=\dfrac{1-4^8}{1-4}p_1=\dfrac{4^8-1}{3}p_1$,又 $p_0=0$,$p_8=1$,$\therefore p_1=\dfrac{3}{4^8-1}$, ………………… 14 分

$\therefore p_4=p_4-p_0=(p_4-p_3)+(p_3-p_2)+(p_2-p_1)+(p_1-p_0)=p_1\cdot(4^0+4^1+4^2+4^3)=\dfrac{1-4^4}{1-4}p_1=\dfrac{4^4-1}{3}\times\dfrac{3}{4^8-1}=\dfrac{1}{4^4+1}=\dfrac{1}{257}$,$p_4$ 表示最终认为甲药更有效的概率.

由计算结果可以看出,在甲药治愈率为 0.5,乙药治愈率为 0.8 时,认为甲药更有效的概率为 $p_4=\dfrac{1}{257}\approx0.003\,9$,此时得出错误结论的概率非常小,说明这种实验方案合理. ………………… 17 分

## 解答 14 "18 题、19 题"34 分练

18. **解**:(1)因为 $C$ 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$,所以 $\dfrac{b}{a}=\sqrt{2}$,

则 $b^2=2a^2$, ………………… 1 分

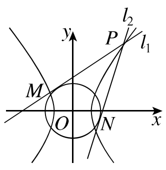
所以 $2c=2\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{3}a$. … 2 分

因为 $a^4+b^4+4=4c^2$,所以 $a^4+4a^4+4=12a^2$,得$(a^2-2)(5a^2-2)=0$.

因为 $a>1$,所以 $a^2>1$,则 $a^2=2$,所以 $b^2=2a^2=4$,故 $C$ 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{4}=1$. ………………… 4 分

(2)证明:(i)设 $P(x_0,y_0)$,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,如图所示,

设过点 $P$ 的切线的斜率为 $k$,则切线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$,即 $kx-y+y_0-kx_0=0$,由圆心$(0,0)$到切线的距离等于半径,得 $\dfrac{|y_0-kx_0|}{\sqrt{k^2+1}}=2$,




………………… 7 分

即$(4-x_0^2)k^2+2kx_0y_0+4-y_0^2=0$,因此 $l_1,l_2$ 的斜率 $k_1,k_2$ 是以上方程的两个根,则 $k_1k_2=\dfrac{4-y_0^2}{4-x_0^2}$. ……… 9 分

又因为 $\dfrac{x_0^2}{2}-\dfrac{y_0^2}{4}=1$,所以 $k_1k_2=\dfrac{4-y_0^2}{4-x_0^2}=\dfrac{8-2x_0^2}{4-x_0^2}=2$,所以 $l_1,l_2$ 的斜率之积为定值,且定值为 2. ……… 10 分

(ii)由 $\begin{cases}y-y_0=k_1(x-x_0),\\2x^2-y^2=4,\end{cases}$ 消去 $y$ 得 $(2-k_1^2)x^2-2k_1(y_0-k_1x_0)x-k_1^2x_0^2+2k_1x_0y_0-y_0^2-4=0$. ………… 11 分

因为$(4-x_0^2)k_1^2+2k_1x_0y_0+4-y_0^2=0$,所以$(2-k_1^2)x^2-2k_1(y_0-k_1x_0)x-4(k_1^2+2)=0$,则 $x_1x_0=\dfrac{-4(k_1^2+2)}{2-k_1^2}$.

………………… 13 分

同理可得 $x_2x_0=\dfrac{-4(k_2^2+2)}{2-k_2^2}$,

………………… 14 分

所以 $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{(k_1^2+2)(2-k_2^2)}{(2-k_1^2)(k_2^2+2)}=\dfrac{4-k_1^2k_2^2+2(k_1^2-k_2^2)}{4-k_1^2k_2^2+2(k_2^2-k_1^2)}$.

因为 $k_1k_2=2$,所以 $4-k_1^2k_2^2=0$,所以 $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{2(k_1^2-k_2^2)}{2(k_2^2-k_1^2)}=-1$,则 $x_1+x_2=0$.

………………… 16 分

因为 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$都在 $C$ 上,所以 $y_1+y_2=0$ 或 $y_1=y_2$(舍去),所以存在定点 $A(0,0)$,使得 $M,N$ 关于点 $A(0,0)$对称. ………………… 17 分

19. **解**:(1)第 1 行最后两个数 $C_0^0=C_1^1=1$,第 2 行最后两个数 $C_2^1=C_3^2-C_3^0=2$.

………………… 1 分

第 $m(m\geqslant3)$行的第 $m$ 个数为 $C_{2m-2}^{m-1}-C_{2m-2}^{m-3}$,第 $m+1$ 个数为 $C_{2m-1}^{m}-C_{2m-1}^{m-2}$,

猜测:$C_{2m-2}^{m-1}-C_{2m-2}^{m-3}=C_{2m-1}^{m}-C_{2m-1}^{m-2}$.

………………… 2 分

方法一:要证 $C_{2m-2}^{m-1}-C_{2m-2}^{m-3}=C_{2m-1}^{m}-C_{2m-1}^{m-2}$,即证 $C_{2m-1}^{m}-C_{2m-2}^{m-1}=C_{2m-1}^{m-2}-C_{2m-2}^{m-3}$, ………………… 3 分

即证 $C_{2m-2}^{m}+C_{2m-2}^{m-1}-C_{2m-2}^{m-1}=C_{2m-2}^{m-2}+C_{2m-2}^{m-3}-C_{2m-2}^{m-3}$, ………………… 5 分

即证 $C_{2m-2}^{m}=C_{2m-2}^{m-2}$,该式显然成立,

所以 $C_{2m-1}^{m}-C_{2m-2}^{m-1}=C_{2m-1}^{m-2}-C_{2m-2}^{m-3}$,所以每一行的最后两个数相等. … 6 分

方法二:因为 $C_{2m-1}^{m}-C_{2m-1}^{m-2}=\dfrac{(2m-1)!}{m!\,(m-1)!}-\dfrac{(2m-1)!}{(m-2)!\,(m+1)!}=\dfrac{(2m-1)!}{m!\,(m+1)!}[m(m+1)-m(m-1)]=\dfrac{2m(2m-1)!}{m!\,(m+1)!}=\dfrac{(2m)!}{m!\,(m+1)!}$. … 4 分

$C_{2m-2}^{m-1}-C_{2m-2}^{m-3}=\dfrac{(2m-2)!}{(m-1)!\,(m-1)!}-\dfrac{(2m-2)!}{(m-3)!\,(m+1)!}=\dfrac{(2m-2)!}{(m-1)!\,(m+1)!}[(m+1)m-(m-1)(m-2)]=\dfrac{(4m-2)(2m-2)!}{(m-1)!\,(m+1)!}=\dfrac{2(2m-1)!}{(m-1)!\,(m+1)!}=\dfrac{(2m)!}{m!\,(m+1)!}$.

所以 $C_{2m-2}^{m-1}-C_{2m-2}^{m-3}=C_{2m-1}^{m}-C_{2m-1}^{m-2}$,所以每一行的最后两个数相等. … 6 分

(2)证明:第 1 行的所有数之和为 $C_0^0+C_1^1=2$,第 2 行的最后一个数为 $C_3^2-C_3^0=3-1=2$,此时结论成立. …… 7 分

由组合数的性质知 $C_n^{k-1}+C_n^k=C_{n+1}^k$,

第 $m(m\geqslant2)$行的 $m+1$ 个数之和为 $C_{m-1}^0+C_m^1+(C_{m+1}^2-C_{m+1}^0)+(C_{m+2}^3-C_{m+2}^1)+\cdots+(C_{2m-1}^m-C_{2m-1}^{m-2})=(C_{m-1}^0+C_m^1+C_{m+1}^2+\cdots+C_{2m-1}^m)-(C_{m+1}^0+C_{m+2}^1+\cdots+C_{2m-1}^{m-2})=(C_m^0+C_m^1+C_{m+1}^2+\cdots+C_{2m-1}^m)-(C_{m+2}^0+C_{m+2}^1+\cdots+C_{2m-1}^{m-2})=(C_{m+1}^1+C_{m+1}^2+\cdots+C_{2m-1}^m)-(C_{m+3}^1+C_{m+3}^2+\cdots+C_{2m-1}^{m-2})=\cdots=C_{2m}^m-C_{2m}^{m-2}$. ………………… 10 分

而第 $m+1$ 行倒数第二个数为 $C_{2m}^m-C_{2m}^{m-2}$,由(1)得每一行最后两个数相等,所以结论得证. ………………… 11 分

(3)当 $n=1,k=3$ 时,$S_1=a_1=C_1^1=1$,$3S_1=4^1-1$,当 $k\geqslant4$ 时,$kS_1>4^1-1$.

当 $n=2$ 时,$3S_2<4^2-1$.

猜测:存在正整数 $k$,使得对任意正整数 $n$,$kS_n\leqslant4^n-1$ 恒成立,$k$ 的最大值为 3.

………………… 12 分

证明:当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=C_{2n-1}^n-C_{2n-1}^{n-2}=\dfrac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}$,则 $a_{n+1}=\dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+2)!}$,

所以 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+2)!}\times\dfrac{n!\,(n+1)!}{(2n)!}=\dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+2)(n+1)}=\dfrac{2(2n+1)}{n+2}=\dfrac{4(n+2)-6}{n+2}=4-\dfrac{6}{n+2}<4$.

………………… 14 分

又 $a_n>0$,所以 $a_{n+1}<4a_n(n\geqslant2)$,

又 $a_2=2<4a_1$,所以当 $n\geqslant2$ 时,$a_n<4a_{n-1}<4^2a_{n-2}<\cdots<4^{n-1}a_1=4^{n-1}$,

所以当 $n\geqslant2$ 时,$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n<1+4+4^2+\cdots+4^{n-1}=\dfrac{4^n-1}{3}$,所以 $3S_n<4^n-1$.

综上,存在正整数 $k$,使得对任意正整数 $n$,$kS_n\leqslant4^n-1$ 恒成立,$k$ 的最大值为 3.

………………… 17 分

## 解答 15 "18 题、19 题"34 分练

18. **解**:(1)记事件 $A$="监测系统判定指定区域有珍稀动物活动",事件 $B$="指定区域实际上有珍稀动物活动", … 2 分

(i)$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=$

$\frac{0.2\times[1-(1-p_1)^2]}{0.2}=0.96$，

即在该区域有珍稀动物活动的条件下，该监测系统判定指定区域有珍稀动物活动的概率为0.96. …………… 4分

(ii) $P(A)=P(AB\cup A\overline{B})=P(AB)+P(A\overline{B})=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})$ …………… 5分

$=0.2[1-(1-p_1)^2]+0.8[1-(1-p_2)^2]=0.2\times[1-(1-0.8)^2]+0.8\times[1-(1-0.02)^2]=0.223\,68$，…… 6分

则 $P(\overline{B}|A)=\frac{P(A\overline{B})}{P(A)}=\frac{P(\overline{B})\cdot P(A|\overline{B})}{P(A)}=\frac{0.8\times[1-(1-0.02)^2]}{0.223\,68}\approx0.142$，

即在判定指定区域有珍稀动物活动的条件下，指定区域实际上没有珍稀动物活动的概率约为0.142. ………… 8分

(2) $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)\cdot P(A|B)}{P(A)}=\frac{0.2[1-(1-p_1)^2]}{0.2[1-(1-p_1)^2]+0.8[1-(1-p_2)^2]}$，

…………………………… 10分

$P(\overline{B}|\overline{A})=\frac{P(\overline{A}\,\overline{B})}{P(\overline{A})}=\frac{P(\overline{B})\cdot P(\overline{A}|\overline{B})}{P(\overline{A})}=\frac{0.8(1-p_2)^2}{1-\{0.8[1-(1-p_2)^2]+0.2[1-(1-p_1)^2]\}}$.

…………………………… 11分

由题意可得 $\begin{cases}P(B|A)\geqslant0.9,\\P(\overline{B}|\overline{A})\geqslant0.9,\end{cases}$

即 $\begin{cases}\frac{0.2[1-(1-p_1)^2]}{0.2[1-(1-p_1)^2]+0.8[1-(1-p_2)^2]}\geqslant0.9,\\\frac{0.8(1-p_2)^2}{1-\{0.8[1-(1-p_2)^2]+0.2[1-(1-p_1)^2]\}}\geqslant0.9.\end{cases}$

…………………………… 12分

令 $1-p_1=x$，$1-p_2=y$，

因为 $0.8\leqslant p_1\leqslant0.9$，$0<p_2<1$，

所以 $0.1\leqslant x\leqslant0.2$，$0<y<1$，

可得 $\begin{cases}\frac{0.2(1-x^2)}{0.2(1-x^2)+0.8(1-y^2)}\geqslant0.9,\\\frac{0.8y^2}{1-[0.8(1-y^2)+0.2(1-x^2)]}\geqslant0.9,\end{cases}$

即 $\begin{cases}36y^2-x^2\geqslant35,\\4y^2\geqslant9x^2,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y^2\geqslant\frac{x^2+35}{36},\\y^2\geqslant\frac{9x^2}{4}.\end{cases}$

…………………………… 15分

因为 $0.1\leqslant x\leqslant0.2$，所以 $\frac{x^2+35}{36}\geqslant\frac{9x^2}{4}$，

所以 $y^2\geqslant\frac{x^2+35}{36}$，故 $\frac{\sqrt{35.04}}{6}\leqslant y<1$，

即 $\frac{\sqrt{35.04}}{6}\leqslant1-p_2<1$，所以 $0<p_2\leqslant1-\frac{\sqrt{35.04}}{6}\approx0.013$，故 $p_2$ 的取值范围为 $(0,0.013]$. ………… 17分

**19. 解：**(1)证明：方法一，由题意可得，$f'(x)=e^x-m$，且 $x>0$，$m\leqslant e$.

…………………………… 1分

若 $m\leqslant1$，则 $f'(x)=e^x-m>1-m\geqslant0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，可知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $f(x)>f(0)=1\geqslant0$. ………………… 2分

若 $1<m\leqslant e$，则令 $f'(x)>0$，得 $x>\ln m$；令 $f'(x)<0$，得 $0<x<\ln m$.

故 $f(x)$ 在 $(0,\ln m)$ 上单调递减，在 $(\ln m,+\infty)$ 上单调递增，………… 3分

可得 $f(x)\geqslant f(\ln m)=m(1-\ln m)$，因为 $1<m\leqslant e$，所以 $\ln m\leqslant1$，所以 $f(x)\geqslant m(1-\ln m)\geqslant0$. ……… 4分

综上所述，当 $m\leqslant e$ 时，$f(x)\geqslant0$.

…………………………… 5分

方法二，因为 $m\leqslant e$，$x>0$，所以 $f(x)=e^x-mx\geqslant e^x-ex$，…………… 2分

设 $t(x)=e^x-ex$，则 $t'(x)=e^x-e$，

…………………………… 3分

令 $t'(x)=0$，得 $x=1$，当 $x\in(0,1)$ 时，$t'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$t'(x)>0$，所以 $t(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，………… 4分

所以 $t(x)\geqslant t(1)=0$，所以 $f(x)\geqslant0$.

…………………………… 5分

方法三，$f(x)=e^x-mx=x\left(\frac{e^x}{x}-m\right)$，$x>0$. ……………………… 1分

设 $p(x)=\frac{e^x}{x}-m(x>0)$，则 $p'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$，………………… 2分

令 $p'(x)=0$，得 $x=1$，当 $x\in(0,1)$ 时，$p'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$p'(x)>0$，所以 $p(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，………… 3分

所以 $p(x)\geqslant p(1)=e-m$.

因为 $m\leqslant e$，所以 $p(x)\geqslant0$，…… 4分

所以当 $x>0$ 时，$f(x)=x\cdot p(x)\geqslant0$，

所以当 $m\leqslant e$ 时，$f(x)\geqslant0$. …… 5分

(2)①由题意可得 $g(x)=e^x-mx-x\ln x-1$，$x\in(0,+\infty)$，令 $g(x)=0$，整理可得 $\frac{e^x}{x}-m-\ln x-\frac{1}{x}=0$，

设 $h(x)=\frac{e^x}{x}-m-\ln x-\frac{1}{x}$，$x>0$，则 $g(x)$ 有两个零点等价于 $h(x)$ 有两个零点. ………………… 6分

$h'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{(x-1)(e^x-1)}{x^2}$，$x>0$，可知 $e^x-1>0$，

令 $h'(x)>0$，得 $x>1$，

令 $h'(x)<0$，得 $0<x<1$，则 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(x)\geqslant h(1)=e-m-1$. … 7分

因为 $h(x)$ 有两个零点，所以 $h(1)=e-m-1<0$，解得 $m>e-1$.

当 $m>e-1>0$ 时，令 $a=e^{-m}\in(0,1)$，则 $e^a-1>0$，则 $h(a)=\frac{e^a-1}{a}-\ln a-m>-\ln a-m=-\ln e^{-m}-m=0$，可知 $h(x)$ 在 $(a,1)$ 上有且仅有一个零点；

…………………………… 9分

当 $x\to+\infty$ 时，$h(x)\to+\infty$，可知 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有且仅有一个零点.

故当 $m>e-1$ 时，$h(x)$ 有两个零点，即 $g(x)$ 有两个零点. 综上所述，$m$ 的取值范围为 $(e-1,+\infty)$. ………… 11分

②证明：方法一，由①可知 $h(x_1)=\frac{e^{x_1}}{x_1}-m-\ln x_1-\frac{1}{x_1}=0$，即 $m=\frac{e^{x_1}}{x_1}-\ln x_1-\frac{1}{x_1}$，要证 $x_1+\ln x_2<m-\frac{\sqrt{2}}{2}$，只需证 $x_1+\ln x_2<\frac{e^{x_1}}{x_1}-\ln x_1-\frac{1}{x_1}-\frac{\sqrt{2}}{2}$，即证 $\ln(x_1x_2)<\frac{e^{x_1}}{x_1}-x_1-\frac{1}{x_1}-\frac{\sqrt{2}}{2}$. ………………… 12分

令 $F(x)=\frac{e^x}{x}-x-\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x>0$，则 $F'(x)=\frac{(x-1)(e^x-x-1)}{x^2}$.

令 $\varphi(x)=e^x-x-1$，$x>0$，则 $\varphi'(x)=e^x-1>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，故 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

则 $\varphi(x)>\varphi(0)=0$，即当 $x>0$ 时，$e^x-x-1>0$.

令 $F'(x)>0$，得 $x>1$，令 $F'(x)<0$，得 $0<x<1$，故 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，可得 $F(x)\geqslant F(1)=e-2-\frac{\sqrt{2}}{2}>0$. ………… 13分

令 $G(x)=h(x)-h\left(\frac{1}{x}\right)$，$x>1$，则 $G'(x)=h'(x)+\frac{1}{x^2}h'\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{(x-1)(e^x-xe^{\frac{1}{x}}+x-1)}{x^2}$，…… 14分

令 $n(x)=e^x-xe^{\frac{1}{x}}+x-1$，$x>1$，

则 $n'(x)=e^x-e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}+1$，

因为 $x>1$，所以 $n'(x)=e^x-e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}+1>e-e+\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}+1=\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}+1>0$，所以 $n(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，则 $n(x)>n(1)=0$，可得 $G'(x)>0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，故 $G(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，则 $G(x)>G(1)=0$，

即 $h(x)>h\left(\frac{1}{x}\right)$，$x>1$.

不妨设 $0<x_1<1<x_2$，则 $h(x_1)=h(x_2)>h\left(\frac{1}{x_2}\right)$，且 $0<\frac{1}{x_2}<1$，又 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，所以 $x_1<\frac{1}{x_2}$，故 $0<x_1x_2<1$，可得 $\ln(x_1x_2)<0$，故 $\ln(x_1x_2)<0<\frac{e^{x_1}}{x_1}-x_1-\frac{1}{x_1}-\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $x_1+\ln x_2<m-\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……… 17分

方法二，由①知 $h(x_1)=0$，即 $\frac{e^{x_1}}{x_1}-\ln x_1-\frac{1}{x_1}-m=0$，即 $m=\frac{e^{x_1}}{x_1}-\ln x_1-\frac{1}{x_1}$，要证 $x_1+\ln x_2<m-\frac{\sqrt{2}}{2}$，只需证 $x_1+\ln x_2<\frac{e^{x_1}}{x_1}-\ln x_1-\frac{1}{x_1}-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

即证 $\ln(x_1x_2)<\frac{e^{x_1}}{x_1}-x_1-\frac{1}{x_1}-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

…………………………………… 12分

设 $G(x)=\frac{e^x}{x}-x-\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{2}}{2}(x>0)$，则 $G'(x)=\frac{(x-1)(e^x-x-1)}{x^2}$.

由 $e^x\geqslant ex$ 得 $e^{x-1}\geqslant x$，所以 $e^x\geqslant x+1$（当且仅当 $x=0$ 时，等号成立），

所以当 $x>0$ 时，$e^x-x-1>0$.

令 $G'(x)=0$，得 $x=1$，当 $x\in(0,1)$ 时，$G'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$G'(x)>0$，所以 $G(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $G(x)\geqslant G(1)=e-1-1-\frac{\sqrt{2}}{2}>0$.

…………………………………… 13分

要证 $\ln(x_1x_2)<\frac{e^{x_1}}{x_1}-x_1-\frac{1}{x_1}-\frac{\sqrt{2}}{2}$，只需证 $\ln(x_1x_2)<0$，即证 $x_1x_2<1$.

…………………………………… 14分

令 $F(x)=h(x)-h\left(\frac{1}{x}\right)(x>1)$，

则 $F(x)=\frac{e^x}{x}-\ln x-\frac{1}{x}-m-\left(xe^{\frac{1}{x}}-\ln\frac{1}{x}-x-m\right)=e^{x-\ln x}-e^{\frac{1}{x}-\ln\frac{1}{x}}+(x-\ln x)-\left(\frac{1}{x}-\ln\frac{1}{x}\right)$.

…………………………………… 15分

令 $H(x)=(x-\ln x)-\left(\frac{1}{x}-\ln\frac{1}{x}\right)=x-\frac{1}{x}-2\ln x\ (x>1)$，则 $H'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\left(1-\frac{1}{x}\right)^2>0$，

所以 $H(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以当 $x>1$ 时，$H(x)>H(1)=0$，即 $x-\ln x>\frac{1}{x}-\ln\frac{1}{x}$，

所以 $e^{x-\ln x}>e^{\frac{1}{x}-\ln\frac{1}{x}}$，所以当 $x>1$ 时，$F(x)>0$，即 $h(x)>h\left(\frac{1}{x}\right)$.

…………………………………… 16分

若 $0<x_1<1<x_2$，则 $h(x_1)=h(x_2)>h\left(\frac{1}{x_2}\right)$，即 $h(x_1)>h\left(\frac{1}{x_2}\right)$，

又 $0<\frac{1}{x_2}<1$，$h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，所以 $x_1<\frac{1}{x_2}$，即 $x_1x_2<1$；

若 $0<x_2<1<x_1$，则 $h(x_1)=h(x_2)>h\left(\frac{1}{x_1}\right)$，即 $h(x_2)>h\left(\frac{1}{x_1}\right)$，

又 $0<\frac{1}{x_1}<1$，$h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，所以 $x_2<\frac{1}{x_1}$，即 $x_1x_2<1$.

综上，$x_1x_2<1$，所以 $x_1+\ln x_2<m-\frac{\sqrt{2}}{2}$. …………………… 17分

## 解答16 "18题、19题"34分练

**18. 解**：(1)设点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$. 由题可知，当 $k=0$ 时，显然有 $k_{AM}+k_{BM}=0$. …………………………………… 1分

当 $k\neq0$ 时，直线 $OM$ 的方程为 $y=-\frac{1}{k}x$，点 $M(2k,-2)$.

联立直线 $AB$ 与抛物线 $C$ 的方程得 $x^2-2pkx-4p=0$，$\Delta=4p^2k^2+16p>0$，所以 $x_1+x_2=2pk$，$x_1x_2=-4p$.

…………………………………… 3分

因为直线 $AM$，$AB$，$BM$ 的斜率成等差数列，所以 $\frac{y_1+2}{x_1-2k}+\frac{y_2+2}{x_2-2k}=2k$，即 $\frac{kx_1+4}{x_1-2k}+\frac{kx_2+4}{x_2-2k}=2k$，

即 $\frac{(kx_1+4)(x_2-2k)+(kx_2+4)(x_1-2k)}{(x_1-2k)(x_2-2k)}=2k$，化简得 $2(k^2+2)(x_1+x_2-4k)=0$.

…………………………………… 5分

将 $x_1+x_2=2pk$ 代入上式得 $2(k^2+2)(2pk-4k)=0$，又 $k\neq0$，所以 $p=2$，所以抛物线 $C$ 的方程为 $x^2=4y$.

…………………………………… 8分

(2)证明：设直线 $l':y=kx+n(n\neq2)$，联立直线 $l'$ 与抛物线 $C$ 的方程，得 $x^2-4kx-4n=0$.

因为直线 $l'$ 与抛物线 $C$ 相切，所以 $\Delta'=16k^2+16n=0$，得 $n=-k^2$，故点 $N(2k,k^2)$. …………………… 10分

设线段 $AB$ 的中点为 $E$，连接 $ME$，因为 $\frac{x_1+x_2}{2}=2k$，$\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{k(x_1+x_2)+4}{2}=2k^2+2$，所以点 $E(2k,2k^2+2)$.

…………………………………… 12分

因为 $M$，$N$，$E$ 三点的横坐标均为 $2k$，且 $\frac{2k^2+2-2}{2}=k^2$，所以 $M$，$N$，$E$ 三点共线，且点 $N$ 为线段 $ME$ 的中点，所以 $\triangle AMN$ 的面积为 $\triangle ABM$ 面积的 $\frac{1}{4}$.

…………………………………… 14分

记 $\triangle AMN$ 的面积为 $S$，因为点 $M(2k,-2)$ 到直线 $AB:kx-y+2=0$ 的距离 $d=\frac{2k^2+4}{\sqrt{k^2+1}}$，所以 $S=\frac{1}{8}|AB|\times d=\frac{1}{8}\sqrt{1+k^2}\times\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}\times\frac{2k^2+4}{\sqrt{k^2+1}}=(k^2+2)^{\frac{3}{2}}\geqslant2\sqrt{2}$，当且仅当 $k=0$ 时，等号成立. 所以命题得证.

…………………………………… 17分

**19. 解**：(1)设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q$.

若 $q=1$，则 $S_{10}=10a_1=0$，解得 $a_1=0$，则 $\sum_{i=1}^{10}|a_i|=0$，与题设矛盾，舍去；

…………………………………… 1分

若 $q\neq1$，则 $S_{10}=\frac{a_1(1-q^{10})}{1-q}=0$，可得 $q=-1$，…………………… 2分

则 $\sum_{i=1}^{10}|a_i|=10|a_1|=1$，解得 $a_1=\frac{1}{10}$ 或 $a_1=-\frac{1}{10}$，…………………… 3分

故 $a_n=\frac{1}{10}\cdot(-1)^{n-1}(1\leqslant n\leqslant10)$ 或 $a_n=\frac{1}{10}\cdot(-1)^n(1\leqslant n\leqslant10)$.

…………………………………… 5分

(2)设等差数列 $\{a_n\}(1\leqslant n\leqslant2m,m\in\mathbf{N}^*)$ 的公差为 $d$，因为 $S_{2m}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2m}=0$，所以 $\frac{2m(a_1+a_{2m})}{2}=0$，则 $a_1+a_{2m}=a_m+a_{m+1}=0$，

故 $a_m=-a_{m+1}$，…………………… 6分

由 $a_m>a_{m+1}$，得 $d<0$，$a_m>0$，$a_{m+1}<0$. …………………… 7分

又 $\sum_{i=1}^{2m}|a_i|=1$，所以 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m=\frac{1}{2}$，$a_{m+1}+a_{m+2}+a_{m+3}+\cdots+a_{2m}=-\frac{1}{2}$，两式相减得 $m^2\cdot d=-1$，即 $d=-\frac{1}{m^2}$，… 8分

又 $S_m=a_1m+\frac{m(m-1)}{2}d=\frac{1}{2}$，得 $a_1=\frac{2m-1}{2m^2}$，…………………… 9分

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=\frac{2m-1}{2m^2}+(n-1)\cdot\left(-\frac{1}{m^2}\right)=\frac{-2n+2m+1}{2m^2}$ $(1\leqslant n\leqslant2m,m\in\mathbf{N}^*)$. …… 10分

(3)记 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_N$ 中所有非负项之和为 $A$，所有负项之和为 $B$，

因为数列 $\{a_n\}$ 为"$N$ 阶可控摇摆数列"，

所以 $\begin{cases}A+B=0,\\A-B=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}A=\frac{1}{2},\\B=-\frac{1}{2},\end{cases}$

故 $-\frac{1}{2}=B\leqslant S_n\leqslant A=\frac{1}{2}(n=1,2,3,\cdots,N)$，所以 $|S_n|\leqslant\frac{1}{2}(n=1,2,3,\cdots,N)$. …………………… 12分

若存在 $1<m<N$，使得 $\sum_{i=1}^{N}|a_i|=2S_m$，即 $S_m=\frac{1}{2}$，则 $a_1\geqslant0,a_2\geqslant0,\cdots,a_m\geqslant0,a_{m+1}<0,a_{m+2}<0,\cdots,a_N<0$，且 $a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_N=-\frac{1}{2}$.

…………………………………… 13分

假设数列 $\{S_n\}$ 也为"$N$ 阶可控摇摆数列"，记数列 $\{S_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $T_n$，则 $T_m=S_1+S_2+S_3+\cdots+S_m\leqslant\frac{1}{2}$，

…………………………………… 14分

因为 $S_m=\frac{1}{2}$，所以 $S_1=S_2=S_3=\cdots=S_{m-1}=0$，所以 $a_1=a_2=a_3=\cdots=a_{m-1}=0$，$a_m=\frac{1}{2}$.

…………………………………… 15分

又 $a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_N=-\frac{1}{2}$，所以 $S_{m+1}\geqslant0,S_{m+2}\geqslant0,\cdots,S_N\geqslant0$，

所以 $|S_1|+|S_2|+|S_3|+\cdots+|S_N|=S_1+S_2+S_3+\cdots+S_N$，

故 $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_N=0$ 与 $|S_1|+|S_2|+|S_3|+\cdots+|S_N|=1$ 不能同时成立，故数列 $\{S_n\}$ 不能为"$N$ 阶可控摇摆数列". …………… 17分